

수열 연산 - 풀이

작성자: 윤교준

수열 B 에 등장하는 원소를 대표 원소라고 하자. 대표 원소는 최종적으로 수열 X 에 남아 있어야 하므로, 합치기 연산에 의해 없어져서는 안 된다.

값 x 가 수열 A 와 B 에서 등장하는 위치를 각각 $\text{pos}_A(x)$, $\text{pos}_B(x)$ 라고 하자. 여기서, $\text{pos}_B(x)$ 는 x 가 대표 원소일 때에만 정의한다.

먼저 두 연산의 성질을 살펴보자.

합치기 연산은 인접한 두 원소 중 큰 원소를 없애는 연산이다. 또한, 교환 연산으로 두 값 $x < y$ 의 순서가

$$[\dots, x, y, \dots] \rightarrow [\dots, y, x, \dots]$$

와 같이 바뀌면, 이 두 원소의 순서를 다시 원래대로 되돌릴 수 없다. y 가 x 보다 앞에 있는 상태에서는 $y < x$ 가 성립하지 않기 때문이다.

따라서, 두 원소의 상대적인 순서는 최대 한 번만 바뀔 수 있다. 즉, 유효한 연산열에 대해 다음이 성립한다.

$$Q \leq \binom{N}{2} + (N - M) < N^2$$

부분문제 1

현재 수열 전체를 하나의 상태로 생각하여 너비 우선 탐색을 수행할 수 있다.

현재 수열의 길이가 K 라면,

- $X_i < X_{i+1}$ 인 각 위치 i 에 대해 교환 연산을 수행한다.
- $K > M$ 이라면, 각 위치 i 에 대해 합치기 연산을 수행한다.

현재 수열의 길이가 M 이 된 뒤에도 교환 연산은 계속 수행할 수 있음에 유의해야 한다.

각 상태를 처음 방문하게 만든 이전 상태와 연산을 저장하면, 수열 B 에 도달했을 때 연산열을 역추적할 수 있다.

$N \leq 8$ 이므로 가능한 상태를 모두 탐색해도 충분하다.

부분문제 2

최종 수열의 길이는 1이다.

교환 연산은 수열의 원소를 없애지 않는다. 합치기 연산을 반복하여 하나의 원소만 남기면, 남는 값은 처음 수열에 있던 모든 원소의 최솟값이다.

수열 A 는 $1, 2, \dots, N$ 의 순열이므로, 마지막에 남은 값은 반드시 1이다. 즉, $B_1 = 1$ 이 성립해야 한다.

$B_1 = 1$ 이라면, 인접한 두 원소를 임의의 순서로 계속 합치면 된다. 정확히 $N - 1$ 번의 합치기 연산이 필요하다.

전체 시간 복잡도는 $\mathcal{O}(N)$ 이다.

부분문제 3

$M = N$ 이므로 합치기 연산을 한 번도 사용하면 안 된다.

두 대표 원소 p, q 가 다음 조건을 만족한다고 하자.

$$\text{pos}_A(p) < \text{pos}_A(q), \quad p > q$$

두 원소의 순서를 바꾸려면, 어떤 순간에 p 와 q 가 인접한 상태에서 교환 연산을 수행해야 한다. 그러나 $p > q$ 이므로 그러한 교환 연산은 불가능하다.

따라서 반드시

$$\text{pos}_B(p) < \text{pos}_B(q)$$

여야 한다.

이 조건은 충분하기도 하다.

현재 수열에서 인접한 두 원소 p, q 가 이 순서로 놓여 있지만, 수열 B 에서는 q 가 p 보다 앞에 있어야 한다고 하자. 만약 $p > q$ 라면 앞에서 설명한 조건에 모순이다. 따라서 반드시 $p < q$ 이고, 두 원소에 교환 연산을 수행할 수 있다.

그러므로, 각 원소 x 의 정렬 기준을 $\text{pos}_B(x)$ 로 두고 버블 정렬이나 삽입 정렬을 수행하면 된다. 정렬 도중 필요한 모든 교환 연산은 유효하다.

전체 시간 복잡도는 $\mathcal{O}(N^2)$ 이다.

부분문제 4

처음 수열은

$$A = [1, 2, \dots, N]$$

이다.

값 1은 다른 어떤 원소보다도 작으므로 합치기 연산으로 없앨 수 없다. 따라서 1은 반드시 대표 원소여야 한다.

반대로 1이 대표 원소라면 항상 가능하다.

수열을 왼쪽에서 오른쪽으로 보면서, 대표 원소가 아닌 값 x 를 만날 때마다 x 의 바로 왼쪽에 있는 원소와 합친다. 현재 x 의 왼쪽에 있는 원소는 항상 x 보다 작으므로, 이 합치기 연산으로 x 만 없어진다.

모든 대표 원소가 아닌 값을 없앤 뒤에는, 부분문제 3과 같은 방법으로 남은 대표 원소들을 수열 B 의 순서대로 정렬하면 된다.

전체 시간 복잡도는 $\mathcal{O}(N^2)$ 이다.

부분문제 5

대표 원소가 아닌 값이 정확히 하나 존재한다. 그 값을 x 라고 하자.

먼저 대표 원소들 사이에는 부분문제 3에서 설명한 조건이 성립해야 한다.

x 의 오른쪽에 x 보다 작은 값이 존재한다고 하자. x 의 오른쪽에서 처음 등장하는 x 보다 작은 값을 z 라고 하자. x 와 z 사이의 모든 원소는 x 보다 크다.

따라서 x 를 오른쪽으로 계속 교환하여 z 의 바로 앞으로 옮긴 뒤, x 와 z 를 합치면 x 를 없앨 수 있다.

이제 x 가 자신의 오른쪽에 있는 모든 원소보다 작다고 하자. 이러한 원소를 수열 A 의 접미사 최솟값이라고 부르자.

즉, $x = A_i$ 가 접미사 최솟값이라는 것은

$$A_i < A_j \quad (i < j \leq N)$$

을 의미한다.

x 가 접미사 최솟값이라면, x 를 없애는 데 사용되는 더 작은 원소는 처음에 x 의 왼쪽에 있어야 한다.

x 의 왼쪽에 있는 대표 원소 중 수열 B 에서 가장 뒤에 등장하는 원소를 y 라고 하자.

대표 원소들을 수열 B 의 순서대로 정렬하면, y 가 x 의 바로 왼쪽에 오게 된다. 따라서 $y < x$ 라면 y 와 x 를 합쳐서 x 를 없앨 수 있다.

반대로 y 가 존재하지 않거나 $y > x$ 이면 불가능하다.

전체 시간 복잡도는 $\mathcal{O}(N^2)$ 이다.

부분문제 6

수열 B 가 수열 A 의 부분수열이므로, 대표 원소들의 상대적인 순서는 처음부터 수열 B 와 같다.

따라서 대표 원소 사이에 교환 연산을 수행할 필요가 없으며, 부분문제 3에서 설명한 조건은 항상 성립한다.

대표 원소가 아닌 접미사 최솟값 x 를 생각하자.

x 의 왼쪽에 있는 대표 원소 중 수열 B 에서 가장 뒤에 등장하는 원소는, 단순히 수열 A 에서 x 의 왼쪽에 가장 가까이 있는 대표 원소이다. 이를 y 라고 하자.

따라서 모든 대표 원소가 아닌 접미사 최솟값 x 에 대해,

- x 의 왼쪽에 대표 원소 y 가 존재하고,
- $y < x$

여야 한다.

접미사 최솟값이 아닌 대표 원소가 아닌 값들은 오른쪽의 더 작은 원소를 이용하여 없앨 수 있다.

그 뒤 남은 접미사 최솟값들은 바로 왼쪽의 대표 원소와 합치면 된다.

전체 시간 복잡도는 $\mathcal{O}(N^2)$ 이다.

핵심 조건

일반적인 입력에서 수열 A 를 수열 B 로 바꿀 수 있을 필요충분조건은 다음 두 조건이다.

조건 1

모든 대표 원소 p, q 에 대해,

$$\text{pos}_A(p) < \text{pos}_A(q), \quad p > q$$

이면

$$\text{pos}_B(p) < \text{pos}_B(q)$$

이다.

조건 2

대표 원소가 아닌 접미사 최솟값 x 를 생각하자.

x 의 왼쪽에 있는 대표 원소 중 pos_B 의 값이 가장 큰 원소를 y 라고 하자.

그러면 y 가 존재하고,

$$y < x$$

여야 한다.

조건 1의 필요성

조건 1을 만족하지 않는 대표 원소 p, q 가 존재한다고 하자.

수열 A 에서는 p 가 q 보다 앞에 있고 $p > q$ 이지만, 수열 B 에서는 q 가 p 보다 앞에 있다.

두 원소는 모두 대표 원소이므로 합치기 연산으로 없어질 수 없다. 따라서 두 원소의 순서를 바꾸어야 한다.

하지만 p 가 q 의 바로 앞에 놓인 상태에서 $p < q$ 가 성립하지 않으므로, 두 원소를 교환할 수 없다.

따라서 조건 1은 필요하다.

조건 2의 필요성

대표 원소가 아닌 접미사 최솟값 x 를 생각하자.

x 를 없애려면, 어떤 순간에 x 보다 작은 값과 합쳐야 한다. x 보다 작은 모든 값은 처음 수열에서 x 의 왼쪽에 있다.

x 가 없어질 때 남는 더 작은 값을 추적하자. 그 값이 이후에 합치기 연산으로 없어진다면, 그보다 더 작은 값이 대신 남는다. 이 과정을 계속하면, 마지막에는 x 보다 작은 어떤 대표 원소 r 이 남아야 한다.

따라서 x 의 왼쪽에는 적어도 하나의 대표 원소가 존재해야 한다.

이제 x 의 왼쪽에 있는 대표 원소 중 pos_B 가 가장 큰 원소를 y 라고 하자. $y > x$ 라고 가정하자.

처음에 y 는 x 보다 왼쪽에 있고 $y > x$ 이므로, x 가 없어지기 전까지 y 와 x 의 상대적인 순서는 바뀔 수 없다.

x 가 없어지는 순간, x 보다 작은 값은 x 와 인접해야 하므로 y 보다 오른쪽에 있다. 한 번 y 보다 오른쪽으로 이동한 y 보다 작은 값은 다시 y 보다 왼쪽으로 이동할 수 없다.

따라서 마지막에 남는 대표 원소 r 도 y 보다 오른쪽에 있다.

하지만 r 은 처음에 x 의 왼쪽에 있던 대표 원소이고, y 는 그러한 대표 원소 중 pos_B 가 가장 크다. 그러므로

$$\text{pos}_B(r) < \text{pos}_B(y)$$

이고, 최종 수열에서는 r 이 y 보다 왼쪽에 있어야 한다. 이는 모순이다.

따라서 반드시 $y < x$ 여야 한다.

부분문제 7

위의 두 조건을 직접 검사할 수 있다.

모든 두 값 p, q 의 쌍에 대해, 수열 A 와 수열 B 를 선형으로 순회하여 $\text{pos}_A(p), \text{pos}_A(q), \text{pos}_B(p), \text{pos}_B(q)$ 를 찾으면 조건 1을 검사할 수 있다.

값의 쌍은 $\mathcal{O}(N^2)$ 개이고, 각 쌍을 검사하는 데 $\mathcal{O}(N)$ 의 시간이 필요하다.

조건 2는 각 접미사 최솟값마다 왼쪽의 대표 원소들을 직접 조사하면 된다.

조건을 모두 검사한 뒤에는, 부분문제 8에서 설명할 구성 방법을 그대로 사용한다.

전체 시간 복잡도는 $\mathcal{O}(N^3)$ 이다.

부분문제 8

두 단계에 걸쳐 대표 원소가 아닌 값들을 없앤 뒤, 대표 원소들을 수열 B 의 순서대로 정렬한다.

첫 번째 단계

수열 A 를 오른쪽에서 왼쪽으로 순회하면서, 대표 원소가 아니고 접미사 최솟값도 아닌 값들을 없앤다.

현재 처리하는 값을 x 라고 하자. x 는 접미사 최솟값이 아니므로, x 의 오른쪽에는 x 보다 작은 값이 존재한다.

x 의 오른쪽에서 처음 등장하는 x 보다 작은 값을 z 라고 하자. x 와 z 사이의 모든 값은 x 보다 크다.

따라서 다음과 같이 x 를 오른쪽으로 이동시킬 수 있다.

$$[\dots, x, c_1, c_2, \dots, c_k, z, \dots] \rightarrow [\dots, c_1, c_2, \dots, c_k, x, z, \dots]$$

여기서 모든 c_i 는 x 보다 크므로, 사용한 모든 교환 연산은 유효하다.

이후 x 와 z 를 합치면 x 가 없어지고 z 가 남는다.

오른쪽에서 왼쪽으로 처리하기 때문에, 현재 처리하는 위치보다 왼쪽의 원소들은 바뀌지 않는다. 또한 더 작은 값은 합치기 연산으로 없어지지 않으므로, 필요한 z 는 항상 존재한다.

이 단계가 끝나면, 남아 있는 대표 원소가 아닌 값들은 모두 원래 수열 A 의 접미사 최솟값이다.

두 번째 단계

이제 현재 수열을 왼쪽에서 오른쪽으로 순회한다.

대표 원소를 만날 때마다, 지금까지 만난 대표 원소들이 수열 B 의 순서대로 정렬되도록 현재 대표 원소를 삽입 정렬한다.

현재 대표 원소를 q 라고 하고, q 가 왼쪽의 대표 원소 p 를 넘어가야 한다고 하자.

수열 B 에서는 q 가 p 보다 앞에 있어야 한다. 만약 $p > q$ 라면 조건 1에 의해 수열 B 에서도 p 가 q 보다 앞에 있어야 하므로 모순이다.

따라서

$$p < q$$

이고, p 와 q 에 교환 연산을 수행할 수 있다.

대표 원소가 아닌 값 x 를 만났다고 하자. 첫 번째 단계가 끝났으므로 x 는 원래 수열 A 의 접미사 최솟값이다.

x 보다 왼쪽에 있던 대표 원소들은 이미 수열 B 의 순서대로 정렬되어 있다. 따라서 x 의 바로 왼쪽에는, 원래 x 의 왼쪽에 있던 대표 원소 중 pos_B 가 가장 큰 원소 y 가 놓여 있다.

조건 2에 의해

$$y < x$$

이므로, y 와 x 를 합치면 x 만 없어진다.

이 작업을 반복하면 모든 대표 원소가 아닌 값들이 없어지고, 남은 대표 원소들은 수열 B 의 순서대로 정렬된다.

따라서 최종 수열은 정확히 수열 B 가 된다.