

공장 - 풀이

작성자: 송준혁

관찰. 밤 d 의 근무자는 날짜 d 와 $d+1$ 의 근무자를 합친 것이므로, 모든 시간대의 인원이 짝수일 필요충분조건은 각 날짜 d 에 대해 $D_i = d$ 인 고용 인원이 짝수인 것이다.

부분문제 1

2^N 개의 부분집합 각각에 대해 관찰의 조건을 확인하고, 각 시간대의 근무자를 정렬해 값을 직접 계산한다. 시간복잡도는 $O(2^N \cdot N \log N)$ 이다.

부분문제 2

모든 지원자가 1일차에 근무하므로, 고용 집합을 A 오름차순으로 정렬하면 인접한 두 명씩 짝이 되고 낮과 두 밤(0일차, 1일차)의 짝이 모두 같다. 따라서 짝 (x, y) ($A_x < A_y$)의 기여는 $(B_y - B_x) - (C_x + C_y) - 2(A_y - A_x)$ 로 독립적이다.

지원자를 A 오름차순으로 훑으며 $dp[j][p] = (j$ 번째 지원자까지 결정했고 아직 닫히지 않은 짝이 $p \in \{0, 1\}$ 개일 때의 최댓값)을 계산한다. j 번째 지원자를 짝의 아래 사람으로 고용하면 $-B_j - C_j + 2A_j$, 위 사람으로 고용하면 $+B_j - C_j - 2A_j$ 를 더한다. 답은 $dp[N][0]$ 이고, 시간복잡도는 $O(N \log N)$ 이다.

부분문제 3

전체 지원자를 A 오름차순으로 훑는 DP를 하자. 상태는 각 날짜별로 지금까지 고용한 인원의 기우성(닫히지 않은 짝의 존재 여부)을 담은 마스크 m (2^T 가지)이다.

짝이 정렬 순서에서 인접한 두 명씩이므로, 밤의 수당은 인접한 두 A 값 사이의 길이 g 인 구간마다 그 아래의 해당 밤 근무자가 홀수 명일 때 g 씩 발생한다. 밤 d 의 기우성은 날짜 d 와 $d+1$ 의 기우성의 XOR이므로, 홀수인 밤의 개수는 $f(m) = \text{popcount}(m \oplus 2m)$ 이다. 인접한 지원자 사이의 A 간격 g 마다 $g \cdot f(m)$ 을 빼고, 지원자 j (날짜 d)를 고용하면 비트 d 를 토글하며 짝을 열 때 $-B_j - C_j$, 닫을 때 $+B_j - C_j$ 를 더한다. 답은 $dp[N][0]$ 이고, 시간복잡도는 $O(2^T N)$ 이다.

이 DP는 부분문제 5의 다이어그램을 아래에서 위로 스윕핑하며 각 열이 현재 영역에 포함되는지를 관리하는 것과 같다.

부분문제 4

날짜 순서로 DP를 하자. $dp[d][S] = (\text{날짜 } 1, \dots, d \text{의 고용을 정했고 날짜 } d \text{의 고용 집합이 } S \text{이며 } d-1 \text{일차 밤까지 정산했을 때의 최댓값})$ 으로 정의하면, 이전 날짜의 집합 S' 을 열거해

$$dp[d][S] = \max_{S'} (dp[d-1][S'] + \text{day}(d, S) - \text{night}(d-1, S', S))$$

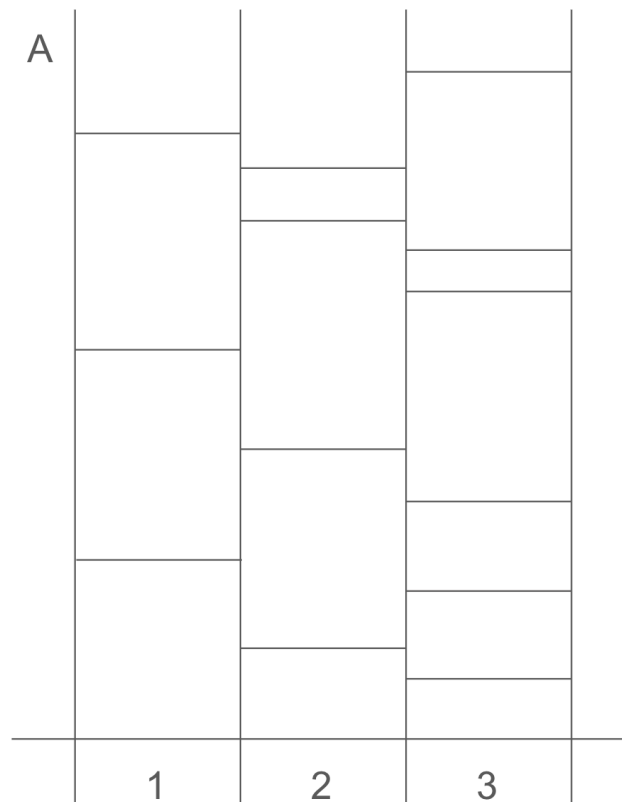
이다. $\text{day}(d, S)$ 는 $|S|$ 가 홀수면 $-\infty$, 짝수면 (낮 이익) $-$ (기본 임금 합)이고, **night**는 두 집합을 병합 정렬해 짝별 차의 합으로 직접 계산한다. T 일차 밤은 빈 날짜 $T + 1$ 을 추가해 처리한다.

날짜별 인원 수를 $k_d \leq 8$ 이라 하면 시간복잡도는 $O(\sum_d 2^{k_{d-1}+k_d}(k_{d-1} + k_d))$ 로 충분히 작다.

이 DP는 부분문제 5의 다이어그램을 왼쪽에서 오른쪽으로 스위핑하며 관리하는 것과 같다.

부분문제 5

다이어그램. 가로축에 날짜, 세로축에 누적 근무 시간을 놓고, 지원자 i 를 열 D_i 의 높이 A_i 에 걸친 가로 선분으로 그리자. 각 열은 자신의 선분들에 의해 위아래로 쌓인 칸들로 분할된다.



영역과의 대응. 관찰의 조건을 만족하는 고용 집합은 칸들의 합집합인 **영역**과 일대일로 대응된다. 날짜 d 에서 고용자들이 이루는 각 짝 (x, y) 를 열 d 의 구간 (A_x, A_y) 로 바꾸면 이 구간들은 서로소이고, 그 합집합이 열 d 의 영역이다. 역으로 임의의 영역에서 각 열의 극대 구간의 위아래 끝은 그 열의 선분이므로, 경계에 놓인 선분의 지원자들을 고용하면 날짜별 인원이 짝수인 고용 집합을 얻는다. (지원자가 한 명뿐인 날짜는 칸을 만들지 않으므로, 어차피 고용될 수 없는 그 지원자는 자연히 배제된다.)

이 대응에서 문제의 값을 영역에 대한 값으로 나타내자. 먼저 경계에서 생기는 값은 다음과 같다.

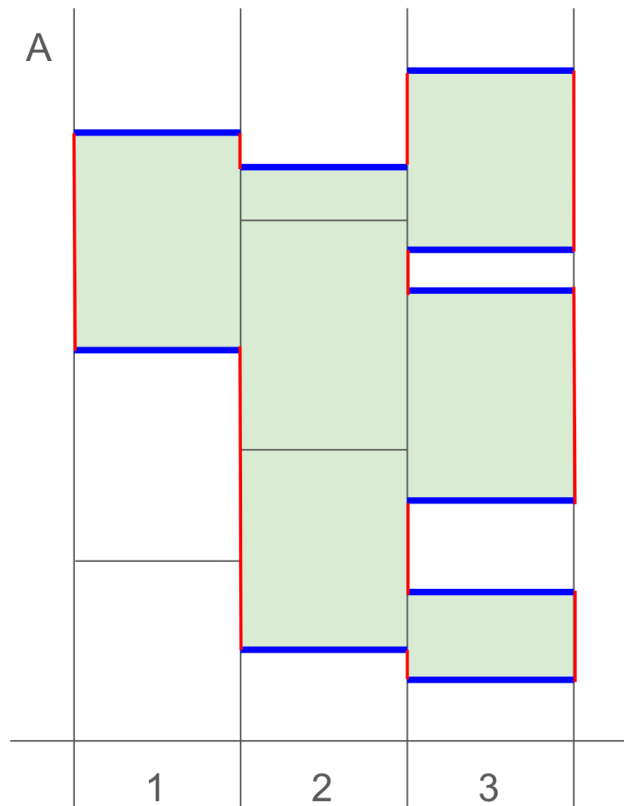
- 영역의 위쪽 경계 선분 i 는 짝의 위 사람이므로 $+B_i$, 아래쪽 경계 선분 i 는 $-B_i$ 를 기여하고, 경계 선분마다 기본 임금 C_i 를 지불한다. 경계가 아닌 선분(영역 내부를 지나거나 영역 밖)의 지원자는 고용되지 않는다.
- 밤 d 의 짝도 정렬 순서에서 인접한 두 명씩이므로, 수당은 열 d 와 $d + 1$ 사이 수직선 위에서 아래 인원의 기우성이 홀수인 높이의 총 길이이다. 이 기우성은 두 열의 기우성의 XOR이고 각 열의 기우성이 홀수인 높이가 정확히 그 열의 영역이므로, 수당은 두 열의 영역의 대칭차의 길이, 즉 그 수직선 위에 드러난 영역의 세로 경계의 길이이다. 0일차 밤과 T 일차 밤은 빈 열과의 경계인 왼쪽·오른쪽 바깥벽에 해당한다.

여기서 B 기여는 경계가 아니라 면적에 부여할 수 있다. 아래 선분이 u , 위 선분이 v 인 칸 f 에 가치 $v_f = B_v - B_u$ 를 부여하자. 영역의 각 극대 구간에서 (위 경계의 B) - (아래 경계의 B)는 사이 선분들의 B 가 연쇄적으로 소거되어 내부 칸들의 v_f 합과 같으므로, 영역 R 전체의 B 기여는 $\sum_{f \in R} v_f$ 이다.

따라서 문제는 평면 분할에서 칸들의 합집합인 영역 R 을 골라

$$\underbrace{\sum_{f \in R} v_f}_{\text{면적의 가치}} - \underbrace{\left(\sum_{\text{경계 가로 선분 } i} C_i + \text{세로 경계의 총 길이} \right)}_{\text{둘레의 비용}}$$

을 최대화하는 문제, 즉 면적의 가치와 둘레의 비용의 차를 최대화하는 영역 선택 문제가 된다. 아래 그림에서 영역의 각 칸마다 v_f 를 얻고, 둘레 중 파란 가로 경계마다 C 를, 빨간 세로 경계의 길이만큼 수당을 지불한다.



최소 컷 모델링. 이러한 (면적의 가치) - (둘레의 비용) 형태의 목적 함수는 최소 컷으로 최적화할 수 있다. 각 칸을 정점으로 하고 소스 s 와 싱크 t 를 추가한 그래프를 만들자. 이 그래프를 s 와 t 가 분리되도록 자르면 모든 칸이 s 측과 t 측으로 나뉘는데, s 측에 붙은 칸은 영역으로 고르는 면, t 측에 붙은 칸은 고르지 않는 면으로 간주한다. 각 열의 최하단 아래와 최상단 위의 바깥은 항상 고르지 않으므로 t 와 동일시한다. 이제 어떤 컷이든 그 용량이 해당 영역 선택의 손실과 일치하도록 다음과 같이 간선을 짓는다.

- $\text{base} = \sum_f \max(v_f, 0)$ 에서 시작해, $v_f > 0$ 이면 $s \rightarrow f$ 에 용량 v_f (f 를 선택하지 않으면 손실), $v_f < 0$ 이면 $f \rightarrow t$ 에 용량 $-v_f$ (f 를 선택하면 손실)의 간선을 짓는다.
- 각 선분 i 에 대해, i 를 사이에 둔 위아래 두 칸 사이에 용량 C_i 의 양방향 간선을 짓는다. 두 칸의 선택이 다를 때, 즉 i 가 둘레의 가로 경계일 때 절단된다.
- 각 행 d ($0 \leq d \leq T$)에 대해, 열 d 와 $d+1$ 사이 수직선을 두 열의 모든 선분 높이로 잘라 기본 구간들로 나누고, 각 기본 구간의 좌우에 인접한 두 칸 사이에 용량이 구간의 길이인 양방향 간선을 짓는다. 좌우의 선택이 다를 때, 즉 세로 경계가 드러날 때 그 길이만큼 절단된다.

바깥이 t 측에 고정되어 있으므로 s 측 칸 집합과 영역 R 이 일대일 대응되고, 절단 용량은 정확히 $\text{base} - (\text{목적 함수})$ 이다. 따라서 답은 $\text{base} - (\text{최소 절단})$ 이다. 최대 유량을 흘린 뒤 잔여 그래프에서 s 로부터 도달 가능한 칸들이 최적 영역이고, 선택된 칸에 흘수 번(정확히 한 번) 인접한 선분의 지원자들을 고용하면 된다.

칸은 $O(N)$ 개, 간선도 각 수직선의 기본 구간 수의 합이 $O(N)$ 이므로 $O(N)$ 개이고, 최대 유량은 $\text{base} = O(N \max B)$ 이하이다. 따라서 Ford-Fulkerson으로도 시간복잡도 $O(E \cdot F) = O(N^2 \max B)$ 로 충분하다.