

곡예 - 풀이

작성자: 송준혁

곡예사 Alice가 l 번 칸, Bob이 r 번 칸에서 있는 상황을 상태 (l, r) 라고 하자. 문제의 조건에 의해 모든 순간 $1 \leq l < r \leq N$ 이 성립한다.

부분문제 1

상태 (l, r) 를 정점으로 하는 그래프를 생각하여 너비 우선 탐색을 수행할 수 있다. 각 상태 (l, r) 에서,

- Alice의 걷기로 상태 $(l + 1, r)$ 로, Bob의 걷기로 상태 $(l, r - 1)$ 로 이동할 수 있다.
- l 번 칸과 r 번 칸에 설치된 각 점프대에 대해, 점프 후의 상태로 이동할 수 있다.

물론 조건을 위반하는 전이는 제외해야 한다. 질의마다 시작 상태에서 DFS 등의 그래프 탐색을 수행해 목표 상태의 도달 가능 여부를 확인하면 된다. 상태는 $O(N^2)$ 개, 간선은 $O(N^2 + NM)$ 개이므로 전체 시간복잡도는 $O(Q(N^2 + NM))$ 이고, $N, M, Q \leq 100$ 이므로 충분하다.

부분문제 2

먼저 걷기의 성질을 살펴보자. 상태 (x, y) 에서 Bob이 y' 번 칸까지 왼쪽으로 걸은 뒤 Alice가 x' 번 칸까지 오른쪽으로 걸으면, $x \leq x' < y' \leq y$ 를 만족하는 임의의 상태 (x', y') 에 도달할 수 있고, 이 과정의 모든 중간 상태가 조건을 만족한다. 즉, 구간을 좁히는 것은 자유롭다.

반대로 구간을 넓히는 이동을 생각하자. 상태 (x, y) 에서,

- $x \leq p < y$ 인 칸 p 에 $q < x$ 번 칸으로 향하는 점프대가 있다면, Alice가 p 번 칸까지 걸어가 점프하는 것으로 상태 (q, y) 에 도달할 수 있다.
- $x < p \leq y$ 인 칸 p 에 $q > y$ 번 칸으로 향하는 점프대가 있다면, Bob이 p 번 칸까지 걸어가 점프하는 것으로 상태 (x, q) 에 도달할 수 있다.

이러한 이동을 확장 이동이라고 하고, 확장 이동이 불가능한 상태를 닫힌 상태라고 하자.

관찰 1. 상태 (l, r) 에서 도달 가능한 가장 넓은 구간 (l^*, r^*) 가 유일하게 존재하고, 그 안에 포함되는 상태가 (l, r) 에서 도달 가능한 모든 상태이다. 즉, (l, r) 에서 (x, y) 에 도달할 수 있을 필요충분조건은 $l^* \leq x < y \leq r^*$ 이다.

관찰 2. 어떤 상태에서도, 매 순간 두 곡예사 사이의 점프대 중 구간을 넓힐 수 있는 것을 골라 확장 이동을 반복하면 어떤 순서로 반복하더라도 가장 넓은 구간 (l^*, r^*) 에 도달한다.

증명. 닫힌 상태 (X, Y) 와 $[x, y] \subseteq [X, Y]$ 인 상태 (x, y) 를 생각하자. 핵심은 (x, y) 에서 어떤 행동을 하더라도 구간이 $[X, Y]$ 를 벗어나지 못한다는 것이다. 걷기는 구간을 좁히므로 자명하다. Alice의 점프는 $[X, Y - 1]$ 에 속한 칸에서 일어나는데, (X, Y) 가 닫힌 상태이므로 이 칸들에는 X 보다 왼쪽으로 향하는 점프대가 없다. 마찬가지로 Bob의 점프는 $[X + 1, Y]$ 에 속한 칸에서 일어나므로 Y 보다 오른쪽에 착지할 수 없다.

이제 (l, r) 에서 확장 이동을 반복하자. 확장 이동은 구간을 항상 넓히고 구간은 $[1, N]$ 을 넘을 수 없으므로, 어떤 순서로 반복하더라도 유한 번 뒤에 닫힌 상태 (L, R) 에 도달한다. 앞 문단에 의해 $[l, r]$ 을 포함하는 임의의 닫힌 상태 (X, Y) 에 대해 확장 과정 전체가 $[X, Y]$ 안에 머무르므로 $[L, R] \subseteq [X, Y]$ 이다. 즉 (L, R) 은 $[l, r]$ 을 포함하는 포함 관계상 가장 작은 닫힌 상태이고, 확장 순서와 무관하게 유일하다. 이를 (l^*, r^*) 라고 하자.

(l^*, r^*) 에 도달한 뒤 걷기로 두 꼭짓점 사이의 거리를 좁히면 $l^* \leq x < y \leq r^*$ 인 모든 상태 (x, y) 에 도달할 수 있다. 반대로 (l^*, r^*) 는 $[l, r]$ 을 포함하는 닫힌 상태이므로, 증명의 첫 문단에 의해 어떤 행동의 나열로도 구간이 $[l^*, r^*]$ 를 벗어날 수 없다. 따라서 도달 가능한 상태의 집합은 정확히 $\{(x, y) : l^* \leq x < y \leq r^*\}$ 이고, (l^*, r^*) 가 도달 가능한 유일한 가장 넓은 구간이다. ■

따라서 질의 (a, b, c, d) 의 답은 (a, b) 의 가장 넓은 구간 (l^*, r^*) 에 대해 $l^* \leq c$ 이고 $d \leq r^*$ 인지 확인하는 것으로 판정할 수 있다.

이제 부분문제의 조건을 사용하자. 왼쪽으로 향하는 점프대가 단 하나도 없다는 조건에 의해 상태 (l, r) 에서 출발한 모든 상태 (x, y) 에 대해 $l \leq x$ 가 성립한다. 따라서 $l^* = a$ 이고, 답은 $a \leq c$ 이고 $d \leq r^*$ 인지로 판정된다. 즉, Alice의 이동은 고려할 필요 없이 Bob의 이동 범위만을 고려한다. 여기서 r^* 는 a 가 작아질수록 단조하게 커진다는 점에 주목하자. Bob이 내려가 사용할 수 있는 칸이 늘어나기 때문이다.

질의를 a 가 큰 것부터 오프라인으로 쿼리를 처리하자. 칸 p 에 설치된 점프대의 착지 칸들과 p 중 최댓값을 $g(p)$ 라고 하자. $a = i$ 에 도달하면 칸 $i + 1$ 이 Bob이 설 수 있는 칸으로 새로 추가된다. Alice가 i 위치에 고정되어 있을 때 Bob이 양방향으로 도달 가능한 칸들의 연속 구간을 관리하자. 칸 $i + 1$ 이 추가될 때 구간 $[i + 1, g(i + 1)]$ 과 만나는 컴포넌트들을 왼쪽부터 차례대로 합치면 되는데, 각 기존 컴포넌트는 이미 자신의 점프대들에 대해 닫혀 있으므로 합쳐진 컴포넌트도 닫혀 있다. 질의 (a, b, c, d) 는 i 가 a 에 도달했을 때, 칸 b 가 속한 컴포넌트의 가장 오른쪽 위치를 r^* 로 하여 판정한다.

시간복잡도는 $O((N + M + Q) \alpha(N))$ 이다.

부분문제 3

관찰 1에 의해, 모든 상태 (a, b) 에 대해 가장 넓은 구간 (l^*, r^*) 를 전처리해 두면 각 질의를 $O(1)$ 에 판정할 수 있다. 부분 문제 1의 그래프 탐색 풀이와 같이 상태 (l, r) 을 정점으로 하되 간선을 다음 4개로 줄이자.

- 걷기: 상태 $(l + 1, r)$ 과 $(l, r - 1)$ 로의 간선.
- Alice의 점프: l 번 칸의 점프대 중 가장 왼쪽 착지 칸으로의 간선.
- Bob의 점프: r 번 칸의 점프대 중 가장 오른쪽 착지 칸으로의 간선.

나머지 점프를 지워도 도달 가능성은 변하지 않는다. 구간을 좁히는 점프는 걷기로 대체할 수 있고, 가장 멀리 가지 않는 점프는 가장 먼 점프 후 걷기로 대체할 수 있기 때문이다.

이 그래프는 좁혔다가 점프로 되돌아오는 등의 사이클을 가질 수 있으므로, Kosaraju's algorithm이나 Tarjan's algorithm을 활용해 강한 연결 요소로 압축하자. 같은 강한 연결 요소에 속한 상태들은 서로 도달 가능하므로 같은 (l^*, r^*) 를 가진다. 압축된 DAG의 위상 정렬 역순으로, 각 컴포넌트에 속한 상태들의 l 의 최솟값과 r 의 최댓값에서 시작해 나가는 간선 너머의 값과 합치며 전파하면 모든 상태의 (l^*, r^*) 를 얻는다.

시간복잡도는 $O(N^2 + M + Q)$ 이다.

부분문제 4

각 질의마다 (a, b) 에서 확장 이동을 반복해 (l^*, r^*) 를 직접 구하자. 관찰 2에 의해 확장은 어떤 순서로 수행해도 같은 곳에 도달하므로, 양쪽을 한꺼번에 최대한 넓히는 것을 반복하면 된다.

칸 p 에 설치된 점프대의 착지 칸들과 p 중 최솟값을 $f(p)$, 최댓값을 $g(p)$ 라고 하자. 현재 상태 (x, y) 에서 한 번의 확장은

$$x \leftarrow \min_{x \leq p \leq y-1} f(p), \quad y \leftarrow \max_{x+1 \leq p \leq y} g(p)$$

이고, 이는 구간 최솟값/최댓값 질의(RMQ) 두 번이므로 세그먼트 트리를 이용해 $O(\log N)$ 또는 Sparse table을 이용해 $O(1)$ 에 수행할 수 있다. 반복할 때마다 구간이 1 이상 넓어지거나 더 이상 변하지 않으므로, 반복은 질의당 $O(N)$ 번이다. 반복이 멈춘 상태가 곧 확장 이동이 불가능한 닫힌 상태, (l^*, r^*) 이다.

전처리 $O(N \log N + M)$, 질의당 $O(N)$ 또는 $O(N \log N)$ 으로 전체 시간복잡도는 $O(N \log N + M + QN)$ 이고, $Q \leq 10$ 이므로 충분하다.

부분문제 5

관찰 1에 의해 모든 상태 (a, b) 의 가장 넓은 구간을 전처리해 두면 각 질의를 $O(1)$ 에 판정할 수 있지만, 상태는 $O(N^2)$ 개이므로 전부 전처리할 수는 없다. 대신 두 꼭예사가 인접해 있는 상태 $(i, i+1)$ 에 대응하는 단위 구간 $[i, i+1]$ ($1 \leq i \leq N-1$)들만 전처리하자. 상태 $(i, i+1)$ 의 가장 넓은 구간을 $[L^*(i), R^*(i)]$ 라고 하자.

핵심 관찰은, 큰 구간의 최대 닫힌 구간이 그 안에 포함된 단위 구간들의 도달 가능한 최대 닫힌 구간들의 합집합으로 표현된다는 것이다.

관찰 3. 상태 (l, r) 의 가장 넓은 구간 $[l^*, r^*]$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$[l^*, r^*] = \bigcup_{i=l}^{r-1} [L^*(i), R^*(i)]$$

증명. 우변을 U 라고 하자. U 의 각 항이 (l, r) 에서 도달 가능한 영역임을 보여 $U \subseteq [l^*, r^*]$ 를 얻고, U 가 닫힌 상태임을 보여 반대 방향의 포함을 얻는 것으로 등식을 증명하자.

($\supseteq$) 겹기로 구간을 좁히는 것은 자유로우므로, (l, r) 에서 각 상태 $(i, i+1)$ ($l \leq i \leq r-1$)에 도달할 수 있고, $(i, i+1)$ 에서 도달 가능한 상태는 모두 (l, r) 에서도 도달 가능하다. 따라서 관찰 1에 의해 $[L^*(i), R^*(i)] \subseteq [l^*, r^*]$ 이다.

($\subseteq$) $U = [X, Y]$ 가 닫힌 상태임을 보이면, 관찰 2의 증명에서 $[l^*, r^*]$ 가 $[l, r]$ 을 포함하는 가장 작은 닫힌 상태였으므로 $[l^*, r^*] \subseteq U$ 가 따라온다. 확장 이동이 가능하다고 가정하자. 예컨대 어떤 칸 p ($X \leq p < Y$)에 $q < X$ 번 칸으로 향하는 점프대가 있다고 하자. $[p, p+1] \subseteq [L^*(i), R^*(i)]$ 인 항 i 가 존재하므로, 관찰 1에 의해 상태 $(p, p+1)$ 은 상태 $(i, i+1)$ 에서 도달 가능하다. 그런데 상태 $(p, p+1)$ 에서 Alice가 이 점프대로 점프하면 상태 $(q, p+1)$ 에 도달하므로, 다시 관찰 1에 의해 $q \geq L^*(i) \geq X$ 이다. 이는 모순이므로 왼쪽으로의 확장 이동은 불가능하고, 오른쪽도 대칭적이다. ■

관찰 3에 의해 질의 (a, b, c, d) 는

$$l^* = \min_{a \leq i \leq b-1} L^*(i), \quad r^* = \max_{a \leq i \leq b-1} R^*(i)$$

를 RMQ 두 번으로 구한 뒤 $l^* \leq c$ 이고 $d \leq r^*$ 인지 확인하는 것으로 판정된다. 남은 것은 L^* 와 R^* 의 계산이다.

Doubling을 이용한 로그 제곱 풀이. 부분문제 4의 확장을 상태 $(i, i+1)$ 에서 2^t 번 반복해 얻는 구간을 $[L_t(i), R_t(i)]$ 라고 하자. 한 번의 확장은 $[f(i), g(i+1)]$ 이므로 $L_0(i) = f(i)$, $R_0(i) = g(i+1)$ 이다.

확장 한 번은 정의상, 현재 구간에 포함된 각 단위 구간을 한 번씩 확장한 것들의 합집합이다.

$$\left[\min_{x \leq p \leq y-1} f(p), \max_{x+1 \leq p \leq y} g(p) \right] = \bigcup_{p=x}^{y-1} [f(p), g(p+1)]$$

합집합에 포함된 단위 구간은 어떤 한 항에 통째로 포함되므로 항별로 묶을 수 있고, 이 분해는 확장을 반복해도 유지된다. 즉 구간 $[x, y]$ 에서 확장을 k 번 반복한 구간은, 각 단위 구간 $[p, p+1]$ ($x \leq p \leq y-1$)에서 확장을 k 번 반복한 구간들의 합집합이다. 따라서 확장을 2^{t+1} 번 반복하는 것은 먼저 2^t 번 반복해 $[L_t(i), R_t(i)]$ 를 얻은 뒤, 그 안의 각 단위 구간에서 다시 2^t 번씩 반복한 것들을 합치는 것과 같다.

$$[L_{t+1}(i), R_{t+1}(i)] = \bigcup_{p=L_t(i)}^{R_t(i)-1} [L_t(p), R_t(p)]$$

즉 $L_{t+1}(i)$ 와 $R_{t+1}(i)$ 는 각각 배열 L_t, R_t 위의 구간 최솟값/최댓값이고, 한 라운드는 RMQ를 $O(N)$ 번 수행하는 것으로 $O(N \log N)$ 에 계산할 수 있다. 확장은 한 번에 구간을 1 이상 넓히거나 고정점에서 멈추므로 N 번 반복이면 충분하고, 따라서 $\lceil \log_2 N \rceil$ 라운드 뒤에는 모든 i 에 대해 $[L_t(i), R_t(i)] = [L^*(i), R^*(i)]$ 이다.

전체 시간복잡도는 $O(N \log^2 N + M + Q)$ 이다.

세그먼트 트리 간선과 SCC를 이용한 로그 풀이. Doubling을 이용하는 대신, 단위 구간들을 정점으로 하는 그래프에서 L^* 와 R^* 를 직접 구할 수도 있다. 관찰 1에 의해 상태 $(i, i+1)$ 에서 상태 $(j, j+1)$ 에 도달할 수 있을 필요충분조건은 $[j, j+1] \subseteq [L^*(i), R^*(i)]$ 이다. 한 번의 확장으로 얻는 구간 $[f(i), g(i+1)]$ 에 포함된 단위 구간들로 가는 간선 $i \rightarrow j$ ($f(i) \leq j \leq g(i+1) - 1$)를 연결하자. 간선은 관찰 1에 의해 실제로 도달 가능한 상태로만 이어지고, 역으로 확장을 반복해 구간이 넓어지는 과정을 따라가면, 현재 구간에 포함된 단위 구간이 모두 그래프에서 도달 가능하다는 사실이 귀납적으로 유지된다. 즉 이 그래프에서 i 로부터 도달 가능한 정점의 집합이 정확히 $[L^*(i), R^*(i)]$ 에 포함된 단위 구간들이므로, 도달 가능한 정점 번호의 최솟값이 $L^*(i)$, 최댓값에 1을 더한 값이 $R^*(i)$ 이다.

구간으로 향하는 간선들은 세그먼트 트리 모양으로 희소화할 수 있다. 세그먼트 트리의 각 내부 정점에서 두 자식으로 간선을 연결해 두면, $i \rightarrow [f(i), g(i+1) - 1]$ 꼴의 구간 간선은 구간을 덮는 $O(\log N)$ 개의 트리 정점으로서의 간선으로 대체된다. 정점 $O(N)$ 개, 간선 $O(N \log N)$ 개의 그래프를 얻고, 부분문제 3과 같이 강한 연결 요소로 압축한 뒤 위상 정렬 역순으로 도달 가능한 단위 구간 번호의 최솟값과 최댓값을 전파하면 모든 $L^*(i), R^*(i)$ 를 $O(N \log N)$ 에 얻는다.

전체 시간복잡도는 $O(N \log N + M + Q)$ 이다.