산책로 – 풀이

작성자: 윤교준

정점과 간선에 양의 가중치가 있는 트리가 주어졌을 때, 서로 다른 두 정점 사이를 잇는 경로의 가중치를 최대화해야 한다. 여기서, 경로 P의 가중치 $\mathrm{w}(P)$는 "경로에 속한 간선의 가중치의 총합 $\mathrm{s}(P)$"에서 "경로에 속한 정점의 가중치의 최댓값 $\mathrm{m}(P)$"을 뺀 값으로 정의된다.

부분문제 1

가능한 모든 $\frac{N(N-1)}{2}$가지의 경로 각각에 대해, 그 경로의 가중치를 선형에 계산할 수 있다.

전체 시간 복잡도는 $\mathcal{O}\left(N^3\right)$이다.

부분문제 2

경로의 한쪽 끝 정점을 트리의 루트로 고정하자. 한 번의 DFS로, 각 정점에 대해 루트와 그 정점 사이를 잇는 경로의 "간선 가중치 총합"과 "정점 가중치의 최댓값"을 모두 계산할 수 있다. 즉, 한쪽 끝 정점이 고정되어 있을 때, 가능한 모든 $N-1$가지의 경로의 가중치를 선형에 알 수 있다.

이 작업을 모든 정점에 대해 반복하면, 전체 시간 복잡도 $\mathcal{O}\left(N^2\right)$에 답을 구할 수 있다.

부분문제 3

트리의 지름이 항상 답이 된다. 이는 선형 시간에 알아낼 수 있다.

부분문제 4

주어지는 트리가 선형이다.

일반성을 잃지 않고, 정점의 가중치 A_*가 모두 서로 다르다고 가정하자. 이는 충분히 작은 양의 실수 ε을 정한 후, 각 A_i에 $i\varepsilon$만큼 더했다고 생각하면 된다.

고정된 v에 대해, $\mathrm{m}\left(P_v\right) = A_v$를 만족하는 경로 $P_v = \langle s_v \to s_v + 1 \to \cdots \to e_v \rangle$의 가중치를 최대화하기 위해서는

- $s_v - 1$의 값은 $l < v$이고 $A_l > A_v$이면서 가장 큰 l과 같다. (편의상, $A_0 := +\infty$.)
- $e_v + 1$의 값은 $r > v$이고 $A_r > A_v$이면서 가장 작은 r과 같다. (편의상, $A_{N+1} := +\infty$.)

스택을 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 배열 A_*을 순회하면, 각 v에 대해 그에 대응되는 s_v를 모두 선형 시간에 계산할 수 있다. e_v에 대해서도 대칭적으로 계산할 수 있다.

따라서, 최적의 경로의 후보가 되는 N개의 경로 P_*를 얻을 수 있다. 각 경로의 $\mathrm{s}\left(P_*\right)$ 값은 배열 L_*의 누적합을 통해 상수 시간에 계산할 수 있다.

전체 시간 복잡도는 $\mathcal{O}(N)$이다.

부분문제 5

주어지는 트리가 정점 N을 중심으로 별 모양을 이룬다. 따라서, 하나의 경로에는 간선이 최대 두 개 존재한다.

하나의 간선으로 구성된 경로들은 자명하다.

일반성을 잃지 않고, $A_1 < A_2 < \cdots < A_{N-1}$라고 가정하자. 이는 정점 N을 제외한 나머지 $N-1$개의 정점을 A_*의 값에 따라 정렬하여 reindexing했다고 생각하면 된다.

두 개의 간선으로 구성된 경로는 항상 $P := \langle x \to N \to v \rangle$ $(x < v < N)$ 꼴이다. 이때, v를 고정하면

$$\mathrm{w}(P) = L_x + (L_v - \max\{A_v, A_N\})$$

이므로, L_x가 최대가 되는 $x < v$를 선택하는 것이 최적이다.

전체 시간 복잡도는 $\mathcal{O}(N \log N)$이다.

부분문제 6

다음 핵심 관찰이 필요하다: 상수 X를 고정하고, $A_* > X$인 정점들을 제거하자. 남아있는 연결 컴포넌트 트리들의 지름을 구해, 그중에서 지름이 최대가 되는 경로를 P_X라고 하자. $\mathrm{s}(P_X) - X$를 최대화하는 X의 값이 X_{opt}라면, $P_{X_{\mathrm{opt}}}$는 문제의 답이 된다.

$\mathrm{m}(P_X) \le X$ 이므로, 문제의 답이 되는 경로 P_{opt}에 대해, $X = \mathrm{m}\left(P_{\mathrm{opt}}\right)$일 때에 $\mathrm{s}(P_X) - X$도 최대가 된다. 또한, $X \in \{A_1, A_2, \cdots, A_N\}$만 고려해도 충분하다.

이 부분문제에서는 고려해야 하는 X의 값이 최대 20가지 이므로, 각 X에 대해 직접 포레스트를 구성하여 지름을 계산하면 충분하다.

전체 시간 복잡도는 $\mathcal{O}(20 \times N)$이다.

부분문제 7

부분문제 6의 핵심 관찰을 적용하자.

X의 값이 점점 커지면, 포레스트에는 점점 정점과 간선이 추가되면서, 두 트리가 하나의 간선에 의해 하나의 연결된 트리로 합쳐지는 과정이 반복된다.

두 트리 T_1, T_2가 간선 e에 의해 하나의 트리 $T := T_1 \cup \{e\} \cup T_2$로 합쳐졌다고 하자. T_1과 T_2의 지름이 각각 $P_1 := \langle s_1 \to \cdots \to e_1 \rangle$, $P_2 := \langle s_2 \to \cdots \to e_2 \rangle$ 이라고 하자. 트리의 지름의 성질에 의해, T의 지름은 다음 6개의 경로 중 하나이다:

- 경로 P_1
- 경로 P_2
- 한쪽 끝 정점은 s_1이거나 e_1이고, 반대쪽 끝 정점은 s_2이거나 e_2인 4개의 경로

따라서, 트리에서 임의의 두 정점 사이의 거리를 효율적으로 계산할 수 있다면, 두 트리가 간선에 의해 하나로 합쳐져서 생기는 새로운 트리의 지름도 효율적으로 계산할 수 있다. 정점 사이의 거리는 최소 공통 조상 알고리즘을 통해 계산하면 충분하다.

즉, A_*의 값이 작은 정점부터 차례대로 추가하면서, 각 연결 컴포넌트 트리의 지름에 대한 정보를 관리하면, 모든 $X \in \{A_1, A_2, \cdots, A_N\}$에 대해 $\mathrm{s}(P_X)$의 값을 효율적으로 계산할 수 있다.

전체 시간 복잡도는 $\mathcal{O}(N \log N)$이다.