"초등부 3번. 통행료" 문제 풀이

작성자: 김기범

부분문제 1

어떤 두 건물 사이를 지나는 가능한 모든 경로를 고려하면, 그러한 것들 중 최소 왕복 비용을 구할 수 있다. 하나의 도로를 두 번 이상 지나면서 최소 왕복 비용일 수는 없으므로, $O(M!)$의 시간복잡도로 어떤 건물 쌍에 대한 최소 왕복 비용을 구할 수 있다.

총 M번 변화하는 도로들의 비용들마다 $O(N^2)$번 두 건물 사이의 최소 왕복 비용을 구해야하므로, 전체 시간복잡도 $O(M!N^2M)$에 문제를 풀 수 있다.

부분문제 2

임의의 두 건물 사이의 최소 왕복 비용을 구하기 위해 플로이드-워셜 알고리즘을 사용할 수 있다. 해당 알고리즘은 가능한 모든 두 건물 사이의 최소 왕복 비용을 $O(N^3)$에 구하도록 해주기 때문에, 도로의 비용이 바뀔 때마다 플로이드-워셜 알고리즘을 사용하면 $O(N^3M)$의 시간복잡도로 문제를 해결할 수 있다.

부분문제 3

문제를 거꾸로 생각해서, 처음부터 각 도로들의 통행료가 1인 시점에서부터 도로들을 하나씩 차례대로 통행료를 0으로 설정하는 문제로 생각하자.

맨 처음 시점에 각 건물들 간의 최 왕복 비용을 구하는 것은 플로이드-워셜 알고리즘을 통해 $O(N^3)$에 구할 수 있다.

이제, 어떤 도로의 통행료를 0으로 설정하는 경우를 생각하자. 통행료를 0으로 설정하고 나면, 각 건물들 간의 최소 왕복 비용은 변하지 않거나, 혹은 새롭게 통행료가 0으로 변한 도로를 이용하는 경로중 하나가 기존의 최소 왕복 비용보다 효율적일 것이다. 따라서 기존의 최소 왕복 비용을 f, 새로운 최소 왕복 비용을 f'이라고 하고, 이 도로가 잇는 두 건물을 a, b라고 할 때, 임의의 두 건물 x, y에 대해서 다음이 성립한다:

$f'(x, y) = min(f(x, y), min(f(x, a) + f(b, y) + f(x, b) + f(a, y)))$.

따라서, 도로 하나의 통행료가 변할 때마다 최소 왕복 비용을 $O(N^2)$에 갱신해줄 수 있으므로 전체 문제를 $O(N^2M)$에 해결할 수 있다.

부분문제 4

통행료가 0인 도로만을 통해 오갈 수 있는 건물들 간의 최소 왕복 비용은 0이다. 따라서, 이미 어떤 도로가 잇는 두 건물 사이의 최소 왕복 비용이 0인 경우 해당 도로의 통행료를 0으로 설정하여도 최소 왕복 비용은 바뀌지 않는다.

최소 왕복 비용을 바꾸는 도로의 개수는 $O(N)$이기 때문에, 오직 $O(N)$개의 도로에 대해서만 최소 왕복 비용을 갱신해주면 되며, 한 번의 갱신은 $O(N^2)$에 수행할 수 있기 때문에 전체 문제가 $O(N^3)$에 해결된다.