"초등부 2번 / 중등부 1번. 거울" 문제 풀이

작성자: 반딧불

부분문제 1

$N = 1$인 경우, 답은 $2A_1 - s$가 된다.

$N = 2$인 경우, 거울을 사용하는 순서는 총 두 가지가 있다. 1번 거울을 먼저 사용하는 경우 최종 위치는 $2A_2 - (2A_1 - s)$이고, 2번 거울을 먼저 사용하는 경우 최종 위치는 $2A_1 - (2A_2 - s)$이다. 둘 중 더 큰 것을 출력하면 된다.

부분문제 2

부분문제 1의 상황에서 2번 거울을 이용하는 것이 더 최적일 조건을 분석하면 $2A_1-2A_2+s \geq 2A_2-2A_1+s$, 즉 $A_1 \leq A_2$이다. 따라서 이용하는 거울이 두 개뿐일 때는 더 오른쪽에 있는 거울을 나중에 사용하는 것이 이득이다.

또한, 두 거울을 이용한 뒤의 위치 공식의 형태에서부터, 초기 위치가 오른쪽에 있을 수록 두 개의 거울을 이용한 뒤의 최종 위치도 오른쪽에 있다는 사실을 알 수 있다.

부분문제 2의 상황에서는 이용할 수 있는 거울의 위치가 단 두 가지뿐이다. 왼쪽 거울의 위치 A_1을 L이라고 하고, 오른쪽 거울의 위치 A_N을 R이라고 하자. 두 가지 종류의 거울 중 적당히 골라 두 번의 위치로 가장 오른쪽으로 보내기 위해서는 먼저 위치 L의 거울을, 그 다음으로 위치 R의 거울을 이용하는 것이 최적이다. (초기 위치가 s일 때 최종 위치가 $2A_2 - 2A_1 + s$이므로, A_1은 작을 수록, A_2는 클 수록 최적이다.)

따라서 거울을 이 두 종류만 이용할 수 있을 때, 홀수 번째에는 왼쪽 거울을, 짝수 번째에는 오른쪽 거울을 이용하는 것이 최적이다. 마침 두 거울이 정확히 $N/2$종류씩 존재하므로, 이 경우가 답이 된다. 이 과정을 직접 시뮬레이션해 답을 $O(N)$에 구할 수 있다.

부분문제 3

N이 짝수이다. N개 거울의 위치를 이용하는 순서대로 $x_1, x_2, \cdots, x_N$이라고 하자. 이때 초기 위치 s에 대해 최종 위치를 식으로 쓰면 다음과 같다.

- 1번 거울까지 이용했을 때: $2x_1 - s$
- 2번 거울까지 이용했을 때: $2x_2 - (2x_1 - s) = 2x_2 - 2x_1 + s$
- 3번 거울까지 이용했을 때: $2x_3 - (2x_2 - 2x_1 + s) = 2(x_1 + x_3) - 2x_2 - s$
- 4번 거울까지 이용했을 때: $2x_4 - (2(x_1 + x_3) - 2x_2 + s) = 2(x_2 + x_4) - 2(x_1 + x_3) + s$
- $\cdots$
- N번 거울까지 이용했을 때: $2(x_2 + x_4 + \cdots + x_N) - 2(x_1 + x_3 + \cdots + x_{N-1}) + s$ (단, N은 짝수)

식의 형태를 통해, 홀수 번째에 해당하는 $N/2$개의 턴에는 왼쪽에 있는 $N/2$개의 거울을 이용하고, 짝수 번째에 해당하는 $N/2$개의 턴에는 오른쪽에 있는 $N/2$개의 거울을 사용하는 것이 최적임을 알 수 있다. (홀수 번째 턴끼리, 또는 짝수 번째 턴끼리 거울을 바꾸는 것은 최종 결과에 영향이 없음을 알 수 있다.)

거울의 위치가 정렬되어 주어지므로, 답을 $O(N)$에 구할 수 있다.

이외에 $A_{N/2} < s < A_{N/2+1}$이라는 점을 이용하는 다른 풀이가 있을 수 있다.

부분문제 4

부분문제 3에서 N이 짝수인 경우의 풀이를 설명하였다. N이 홀수인 경우, 사용한 거울의 위치 $x_1, x_2, \cdots, x_N$에 대해 최종 위치는 $2(x_1 + x_3 + \cdots + x_N) - 2(x_2 + x_4 + \cdots + x_{N-1}) - s$가 된다.

식의 형태를 통해 홀수 번째에 해당하는 $(N+1)/2$개의 턴에는 오른쪽에 있는 $(N+1)/2$개의 거울을, 짝수 번째에 해당하는 $(N-1)/2$개의 턴에는 왼쪽에 있는 $(N-1)/2$개의 거울을 사용하는 것이 최적임을 알 수 있다.

거울의 위치가 정렬되어 주어지므로, 답을 $O(N)$에 구할 수 있다.