"고등부 4번. 축제" 문제 풀이

작성자: 이종영

부분문제 1

$dp[u][d]$를 u를 루트로 한 서브트리에서, u에서 리프로 가는 경로들에서 선택된 도로의 수가 d 이하일 때, 일일 이용량 합의 최댓값이라고 정의하자. 답은 각 정점 u에 대해 $dp[u][K]$이다.

일일 이용량이 w인 도로를 추가하는 경우 전이는 도로를 선택하지 않은 경우 $dp[d] \rightarrow dp'[d]$와 도를 선택한 경우 $dp[d] + w \rightarrow dp'[d+1]$이다.

$dp[u]$와 $dp[v]$를 합치는 경우 전이는 $d_1 + d_2 \leq K$인 d_1, d_2에 대해 $dp[u][d_1] + dp[v][d_2] \rightarrow dp'[\max(d_1, d_2)]$이다.

이대로 구현할 경우 시간복잡도가 $O(NK^2)$이지만, 다양한 방법으로 $O(NK)$로 최적화할 수 있다. $\max(d_1, d_2)$를 고정하는 방법으로 $O(K)$에 합치거나, d의 값이 서브트리의 높이 이하임을 이용해 $O(\min(depth(u), K) \cdot \min(depth(v), K))$에 합치는 방법 등이 있다.

부분문제 5

모든 일일 이용량이 1로 동일하다. 이 경우 하나의 트리에 대해서 리프와 연결된 도로들을 선택한 후 지우는 것을 $\lfloor \frac{K}{2} \rfloor$번 반복하고, K가 홀수이고 아직 남은 도로가 존재한다면 추가로 하나 사용하는 것이 최적이다.

모든 서브트리에 대해 답을 구하는 경우, 각 도로가 해당 도로의 위 정점에서 루트로 향하다가 멈추는 어떠한 경로 상의 정점들의 답에 기여한다는 사실을 이용하면 $O(N \log N)$에 해결할 수 있다.

부분문제 9

각 dp 배열들이 d에 대해 오목함을 증명한다.

일일 이용량이 w인 도로를 추가하는 경우 민코프스키 합과 같은 원리로 오목성이 유지된다.

$dp[u]$와 $dp[v]$를 합치는 경우, 오목하고 단조증가하는 두 배열 A와 B가 있을 때, $C[k] = \max_{i \leq k, j \leq k, i+j \leq K} A[i] + B[j]$로 정의되는 배열 C가 오목함을 증명하면 된다. $k \leq \frac{K}{2}$의 경우 $C[k] = A[k] + B[k]$이니 자명하다. $k > \frac{K}{2}$의 경우 $C[k] = \max_{K-k \leq i \leq k} A[i] + B[K-i]$이다. 특정 k에 대한 최적 i를 $f(k)$로 정의할 시, $K - k \leq \lfloor \frac{f(k-1)+f(k+1)}{2} \rfloor \leq \lceil \frac{f(k-1)+f(k+1)}{2} \rceil \leq k$임을 이용해 $2C[k] \geq C[k-1] + C[k+1]$임을 증명할 수 있다.

이제 dp 배열들을 $dp[d] - dp[d-1]$ 값들의 multiset으로 표현할 수 있다.

일일 이용량이 w인 도로를 추가하는 경우의 전이는 단순히 multiset에 w를 추가하고, 크기가 K보다 크다면 가장 작은 값을 빼내는 것으로 충분하다.

$h_1 \leq h_2$에 대해 높이가 h_1, h_2인 두 dp 배열을 $O(h_1 \log K)$에 합칠 수 있다면 전체 문제를 $O(N \log K)$에 해결할 수 있다. $h_1 \geq \frac{K}{2}$인 경우 부분문제 1과 같이 $O(K)$ 등에 합쳐주면 된다. 그렇지 않은 경우, $\max(d_1, d_2) = d_1$ 또는 $d_1 + d_2 > K$가 가능한 d_2는 앞과 뒤의 길이 h_1 부분임을 알 수 있다. 이 부분에 해당되는 dp값만 직접 구하면, 나머지 값들은 평행이동되기에 차이가 변하지 않음을 이용하면 $O(h_1 \log K)$에 처리가 가능하다.