"고등부 2번. 새로운 인연" 문제 풀이

작성자: 박상훈

부분문제 1

L_i번 의자에 앉은 남자와 R_j번 의자에 앉은 여자가 새로운 커플이 되는 것을 L_i와 R_j가 매칭된다고 하자. 각 L_i에 매칭되는 R_j는 $R_1, R_2, \cdots, R_N$ 중 하나고, 모두 다르기 때문에 확인해야 할 경우의 수는 $N!$가지이다. 각 L_i에 매칭되는 R_j를 고정하고 나면 $i \neq j$, $L_i < R_j$ 조건만 확인하면 되고 이는 시간복잡도 $O(N)$에 확인할 수 있다. 따라서, 시간복잡도 $O(N \times N!)$에 문제를 해결할 수 있다.

부분문제 2

앞으로 $R_1 < R_2 < \cdots < R_N$을 만족하도록 정렬해 놓고 생각한다. $R_1, R_2, \cdots, R_N$ 순서로 매칭되는 L_i를 골라준다. 현재까지 매칭된 L_i의 집합을 S라고 하고, 그 상태에 도달할 수 있는 경우의 수를 $dp[S]$로 정의한다. R_j와 매칭되는 L_i는 $L_i \notin S, L_i < R_j, i \neq j$를 만족해야 하고, 매칭하고 나면 S는 $S \cup \{L_i\}$로 바뀌게 된다. R_j와 매칭될 점을 고르기 직전에는 $|S| = j - 1$이므로, 각 S에 대해 정확히 하나의 R_j에서 $O(N)$번의 dp 전이가 발생한다. S는 길이 N의 비트마스크로 표현 가능하므로, 가능한 S의 가짓수는 $O(2^N)$이다. 따라서, 시간복잡도 $O(N \times 2^N)$에 문제를 해결할 수 있다.

포함과 배제의 원리를 적용한 풀이도 있다. 이에 대해서는 부분문제 5의 풀이에 적어두었다.

부분문제 3

(L_i, R_i)를 i라는 정점 번호를 가진 정점으로 두고, $L_i < L_j < R_j < R_i$를 만족하는 (i, j)에 대해, $L_i < L_k < L_j < R_j < R_k < R_i$를 만족하는 k가 존재하지 않는다면 i번 정점과 j번 정점을 연결하는 간선을 추가하여 만든 그래프를 생각하자. 문제 조건에 의해 각 컴포넌트는 트리이고, 부분문제 3에서는 각 컴포넌트가 일직선임을 알 수 있다.

$R_1, R_2, \cdots, R_N$ 순서로 보면서 R_1이 속한 컴포넌트가 끝나는 지점을 생각하자. 이때, 매칭되지 않은 R_j가 존재한다면 그러한 R_j는 끝까지 매칭될 수 없다. 따라서, R_1이 속한 컴포넌트에 있는 L_i와 R_j는 그 컴포넌트 내부에서만 매칭이 발생한다. 이러한 논리를 통해, 각 컴포넌트는 외부로 나가는 매칭이 존재하지 않음을 수학적 귀납법으로 증명할 수 있다. 따라서, 각 컴포넌트에 대해 독립적으로 문제를 해결한 후, 각각의 답을 모두 곱하면 전체 문제의 답이 된다.

컴포넌트가 일직선인 경우, 모든 i에 대해 $P_i \neq i$를 만족하는 순열의 개수를 세는 문제와 동치다. 이는 교란순열이라는 이름으로 잘 알려진 문제이며, 시간복잡도 $O(N)$에 계산할 수 있다. 순열의 길이가 n이고 $P_n = x$라고 하자. x로 가능한 값은 $n-1$가지이다. $P_x = n$인 경우, 길이 $n-2$일 때의 문제와 동일한 상황이 된다. 그렇지 않은 경우, $P_y = n$인 $x \neq y$가 존재한다. P_n을 지우고 P_y를 x로 바꿔서 만든 새로운 순열을 Q라고 하면, Q는 길이 $n-1$의 교란순열이 되고, 이는 P와 일대일대응이다. 따라서, 길이 n의 교란순열의 개수를 D_n이라고 하면 $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$가 성립한다. 따라서, 시간복잡도 $O(N)$에 부분문제 3을 해결할 수 있다.

부분문제 4

정점 i와 j를 연결하는 간선에 대해, $L_i < L_j < R_j < L_i$를 만족하면 i를 j의 부모라고 하자. 각 컴포넌트에 대해 부모가 없는 정점은 유일하게 존재하고, 이를 트리의 루트로 생각해 줄 수 있다. 트리의 루트가

정의되었기 때문에 서브트리, 조상 등도 잘 정의할 수 있다.

$dp[s][j]$를 s번 정점의 서브트리만 고려했을 때, 매칭되지 않은 남자와 여자가 각각 j명인 경우의 수라고 정의하자. dfs를 돌면서 dp를 계산한다. s번 정점의 자식을 $v_1, v_2, \cdots, v_k$라고 하자. (단, $R_{v_1} < R_{v_2} < \cdots < R_{v_k}$) $dp2[v_i][j]$를 $v_1, v_2, \cdots, v_i$번 정점의 서브트리만 고려했을 때, 매칭되지 않은 남자와 여자가 각각 j명인 경우의 수라고 정의하자. $dp2[v_{i+1}]$을 계산하기 위해서는 $dp2[v_i]$와 $dp[v_{i+1}]$을 합쳐줘야 한다. 이때, $v_1, v_2, \cdots, v_i$번 정점의 서브트리에서 매칭되지 않은 남자 중 z명을 고르고, v_{i+1}번 정점의 서브트리에서 매칭되지 않은 여자 중 z명을 골라서 매칭시켜 줄 수 있다. 이를 식으로 표현하면 $dp2[v_{i+1}][x+y-z] \leftarrow dp2[v_i][x] \times dp[v_{i+1}][y] \times \binom{x}{z}\binom{y}{z} \times z!$ 이다. ($a \leftarrow b$는 변수 a에 b를 더해준다는 의미다.)

$dp2[v_k]$를 $dp[s]$로 전이해 주기 위해, 현재 정점에 해당하는 L_i와 R_i를 매칭해줘야 한다. L_i와 R_i를 둘 다 매칭해 주지 않는 경우는 $dp[s][j+1] \leftarrow dp2[v_k][j]$이다. L_i와 R_i중 하나만 매칭해 줄 경우, L_i와 R_i중 선택하는 경우의 수 2가지, 매칭되는 사람의 경우의 수 j가지를 곱해서 총 $2j$가지의 경우의 수가 생긴다. 즉, $dp[s][j] \leftarrow dp2[v_k][j] \times 2j$이다. L_i와 R_i가 둘 다 매칭될 경우, 매칭되는 사람을 고르는 경우의 수가 각각 j가지이므로 이를 곱해서 총 j^2가지 경우의 수가 생긴다. 즉, $dp[s][j-1] \leftarrow dp2[v_k][j] \times j^2$이다.

각 컴포넌트의 루트를 $r_1, r_2, \cdots, r_c$라고 하면 답은 $dp[r_1][0] \times dp[r_2][0] \times \cdots \times dp[r_c][0]$이다.

구현에 따라 시간복잡도는 $O(N^3)$ 또는 $O(N^4)$이다.

부분문제 5

포함과 배제의 원리로 생각한다. $S = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$에 대해, $i \in S$면 L_i와 R_i를 매칭해 주고, $i \notin S$면 L_i와 R_i를 매칭하면 안 된다는 조건을 무시한 채로 매칭해 준다. 이러한 경우의 수를 $f(S)$라고 하면, 포함과 배제의 원리에 의해 답은 $\sum(-1)^{|S|}f(S)$이다. 이를 직접 구현하면 시간복잡도가 $O(N \times 2^N)$이 되어 부분문제 1과 2를 해결할 수 있다.

고정된 S에 대해, $R_1, R_2, \cdots, R_N$ 순서로 보면서 R_i를 매칭해주는 상황을 생각해 보자. $i \in S$면, $a_i = -1$로 정의하고, R_i를 L_i와 매칭해준다. $i \notin S$면, a_i를 R_i가 매칭될 수 있는 L_j의 개수로 정의하고, 그 중 아무거나 골라서 매칭해 준다. 이때, $a_1 a_2 \cdots a_N = (-1)^{|S|}f(S)$임을 알 수 있다. 한편, i번 정점의 조상을 $p_1, p_2, \cdots, p_d$라고 할 때, $i \notin S$면 a_i는 $p_j \notin S$인 j의 개수에 1을 더한 값과 동일하다. 이 사실을 바탕으로 dp를 한다.

$dp[s][j]$를 s의 조상 중 S의 원소가 아닌 것이 $j-1$개일 때, s의 서브트리에 속한 a_i의 곱의 합으로 정의한다. 즉, $a_s = j$이거나 $a_s = -1$만 가능한 상황이다. $a_s = j$인 경우, 자식으로 갔을 때 j값은 1 증가한다. 한편, $a_s = -1$인 경우, 자식으로 갔을 때 j값은 그대로다. 이를 각각 식으로 적으면 $dp[s][j] \leftarrow (dp[v_1][j+1] \times \cdots \times dp[v_k][j+1]) \times j$, $dp[s][j] \leftarrow (dp[v_1][j] \times \cdots \times dp[v_k][j]) \times (-1)$이다.

답은 $dp[r_1][1] \times dp[r_2][1] \times \cdots \times dp[r_c][1]$이다. 시간복잡도는 $O(N^2)$이다.