"초등부 2번 / 중등부 1번. 직각이등변삼각형" 문제 풀이

작성자: 박영우

부분문제 3

정답이 되는 직각이등변삼각형은 직각인 각이 빗변 위쪽에 있는 경우와 아래쪽에 있는 경우로 나눌 수 있다. 각각의 경우에 대해 빗변의 길이의 최솟값을 계산하고, 둘 중에 작은 값을 출력하면 된다.

직각이등변삼각형의 빗변을 잇는 두 점을 $(a,c),(b,c)$라 하자. $(a<b)$ 주어지는 모든 점들은 x,y좌표의 절댓값이 최대 30이므로, $|a|,|b|>90$, $|c|>30$인 삼각형의 경우 고려할 필요가 없다. 따라서, 해당 조건을 만족하는 모든 직각이등변삼각형에 대해 주어지는 모든 점들을 포함하는지 확인하면 된다. 이는 다각형 내부의 점 판정 등 다양한 방법으로 가능하나, 다음과 같은 관찰을 사용할 수 있다.

빗변의 두 끝점이 $(a,c),(b,c)$, $(a<b)$ 직각인 각이 빗변 위쪽에 있는 직각이등변삼각형이 점 (x,y)를 포함할 조건은 다음과 같다.

- (x,y)가 빗변 위쪽에 위치한다. 즉, $y \geq c$이다.
- (x,y)가 직각이등변삼각형의 왼쪽 꼭짓점을 지나고 기울기가 1인 직선 아래에 위치한다. 즉, $x-a \geq y-c$이다.
- (x,y)가 직각이등변삼각형의 오른쪽 꼭짓점을 지나고 기울기가 -1인 직선 아래에 위치한다. 즉, $-(x-b) \geq y-c$이다.

위 조건을 사용하면, 어떤 직각이등변삼각형이 주어진 모든 점을 포함하는지 $O(N)$ 시간에 판정할 수 있다.

따라서, 입력으로 들어오는 점들의 좌표의 절댓값이 최대 X라 하면, 전체 시간 복잡도는 $O(X^3N)$이다.

부분문제 4

조건을 만족하며 빗변의 길이가 최소가 되는 직각이등변삼각형은 모든 변이 주어진 점 중 적어도 하나를 포함하고 있음을 알 수 있다. (한 변의 끝점이 주어진 점 중 하나인 경우도 포함하는 것으로 생각한다.)

우선 직각인 각이 빗변의 위쪽에 있는 직각이등변삼각형만 고려하자. 직각이등변삼각형의 각 변 위에 있는 세 점을 고르면 직각이등변삼각형의 세 꼭짓점을 확정할 수 있다. 따라서 세 점을 선택하는 N^3가지 경우에 대해서 직각이등변삼각형이 결정되고, 부분문제 3의 풀이를 이용해 해당 삼각형이 모든 N개의 점을 포함하는지 확인하는 것으로 문제를 풀 수 있다. 직각인 각이 빗변의 아래쪽에 있는 직각이등변삼각형의 경우 같은 방법으로 풀 수 있다.

전체 시간 복잡도는 $O(N^4)$이다. 이 외에도 해당 부분문제를 풀 수 있는 다양한 다항시간 풀이가 존재한다.

부분문제 5

이 부분문제에서는 주어지는 모든 점들의 y좌표가 같다. 이 경우에는 모든 점들이 직각이등변삼각형의 빗변의 위에 있는 경우가 최선이다. 따라서 주어진 점들의 x좌표의 최댓값과 최솟값의 차이가 빗변의 길이이며 답이 된다.

부분문제 6

이 부분문제에서는 주어지는 모든 점들이 $y=x$ 직선 위에 위치한다. 이 경우에는 모든 점들이 직각이

등변삼각형의 빗변이 아닌 한 변 위에 있는 경우가 최선이다. 따라서, 정답이 되는 직각이등변삼각형의 두 꼭짓점은 주어진 점들 중 x좌표가 가장 작은 점과 가장 큰 점이다. 이를 통해 나머지 한 꼭짓점과 빗변의 길이를 구할 수 있다.

부분문제 7

우선 직각인 각이 빗변의 위쪽에 있는 직각이등변삼각형만 고려하자.

정답이 되는 직각이등변삼각형의 오른쪽 꼭짓점의 좌표가 $(d, 0)$이라 하자. 이 삼각형의 빗변의 중심이 $(0, 0)$이므로, 빗변을 잇는 두 꼭짓점의 좌표는 $(-d, 0)$과 $(d, 0)$이고, 빗변의 길이는 $2d$이다.

빗변의 길이가 $2d$인 직각이등변삼각형이 주어진 모든 점을 포함한다면, $d < d'$인 모든 d'에 대해 빗변의 길이가 d'인 직각이등변삼각형 역시 주어진 모든 점을 포함한다.

빗변의 길이의 최솟값을 구해야 하므로, d에 대한 이분탐색을 통해 최솟값을 구할 수 있다. 고정된 d에 대해 $(-d, 0)$, $(d, 0)$을 꼭짓점으로 하는 직각이등변삼각형이 모든 점을 포함하는지는 부분문제 3의 풀이를 사용하면 된다.

같은 방법으로 직각인 각이 빗변의 아래쪽에 있는 경우도 빗변의 길이의 최솟값을 구할 수 있다. 두 경우 모두 가능하다면 두 빗변의 길이 중 작은 값 출력하고, 그렇지 않다면 가능한 경우의 빗변의 길이를 출력하면 된다.

부분문제 8

직각인 각이 빗변의 위쪽에 있는 직각이등변삼각형만 고려하자. 이러한 삼각형 중 빗변의 길이가 최소인 삼각형의 빗변의 두 끝점이 $(a, c), (b, c)$라 하자. $(a < b)$

주어진 모든 점들의 y좌표의 최솟값을 m이라 하자. 부분문제 3의 조건에 의하면, 주어진 모든 점들의 y좌표는 c 이상이다. 즉, $m \geq c$이다. 만약 $m > c$일 경우, 빗변은 주어진 N개의 점들 중 어떠한 점도 포함하지 않게 되고, 이는 부분문제 4의 관찰에 모순이다. 따라서 $m = c$인 경우만 고려하면 된다.

c의 값이 확정되었으므로, 부분문제 3의 조건에서 a의 최댓값, b의 최솟값을 구할 수 있다. 빗변의 길이인 $b - a$를 최소화해야 하므로, 위 두 값의 차가 답이 된다.

직각인 각이 빗변의 아래쪽에 있는 직각이등변삼각형의 경우도 같은 방법으로 풀 수 있다.

전체 시간복잡도는 $O(N)$이다.