"중등부 2번. 격자 게임" 문제 풀이

작성자: 이종서

부분문제 1

매 이동에서 행, 열 중 하나의 좌표가 정확히 1만큼 증가한다. 따라서, $(N - x_i) + (M - y_i)$의 홀짝성에 따라 마지막으로 움직이는 사람(=승자)이 결정됨을 알 수 있다. (심지어 막혀 있는 칸의 배치는 문제의 답에 아무런 영향을 주지 않는다!)

부분문제 2

제약 조건에 의해 대각선으로만 이동 가능하며, 한 번에 1칸 이상 K칸 이하 움직일 수 있다. 말이 이동해야 하는 총 칸수를 $D := N - x_i$라 하자. D가 $K+1$의 배수라면 항상 정올이가 승리하고, 아니라면 항상 한국이가 승리함을 다음과 같이 경우를 나누어 증명할 수 있다.

$D \leq K + 1$인 경우의 승자를 먼저 살펴보자.

- $D \leq K$인 경우: 한국이가 처음에 말을 D칸 움직이면 이긴다.
- $D = K + 1$인 경우: 한국이가 처음에 말을 $t(1 \leq t \leq K)$칸 이동시켰다고 하자. t의 실제 값과 상관없이 $1 \leq D - t \leq K$ 이므로, 정올이가 말을 $D - t$칸 움직이면 이긴다.

이것을 확장하여 $D > K + 1$인 경우의 승자도 알 수 있다.

- D가 $K + 1$의 배수가 아닌 경우: D를 $K + 1$로 나눈 나머지를 R이라 하자. 한국이가 처음에 말을 R칸 움직였다고 하자. 이후 정올이가 말을 $t(1 \leq t \leq K)$칸 움직일 때 마다 한국이가 말을 $K + 1 - t$칸 움직이면 항상 한국이가 승리한다.
- D가 $K + 1$의 배수인 경우: 한국이가 말을 $t(1 \leq t \leq K)$칸 움직일 때 마다 정올이가 말을 $K + 1 - t$칸 움직이면 항상 정올이가 승리한다.

부분문제 3

막혀 있는 칸이 없으므로 시작 위치와 (N, M) 사이의 행과 열의 개수에 따라 승자가 결정된다. 경우를 여러 개로 나누어 잘 따져보면 해결할 수 있다.

부분문제 4

재귀적으로 문제에 접근해볼 수 있다. $D(i, j)$를 (i, j)를 시작 위치로 할 때 먼저 시작하는 사람이 이기는지의 여부(`true`/`false`)로 정의하자. 기저 사례로 $D(N, M) =$ `false`로 두자. $D(i, j)$가 `true`일 필요 충분 조건은 다음 중 하나 이상이 성립하는 것임을 알 수 있다:

- $i < N$ 이고 $(i + 1, j)$가 막혀 있지 않으며 $D(i + 1, j) =$ `false`
- $j < M$ 이고 $(i, j + 1)$이 막혀 있지 않으며 $D(i, j + 1) =$ `false`
- 어떤 $1 \leq \ell \leq K$가 존재해 $i + \ell \leq N$, $j + \ell \leq M$이고 $(i + \ell, j + \ell)$이 막혀있지 않으며 $D(i + \ell, j + \ell) =$ `false`

이를 다이나믹 프로그래밍으로 구현하면 $O(NM \max\{1, K\})$ 시간에 전체 문제를 해결할 수 있다.