1. 그래프의 지름 (5점)

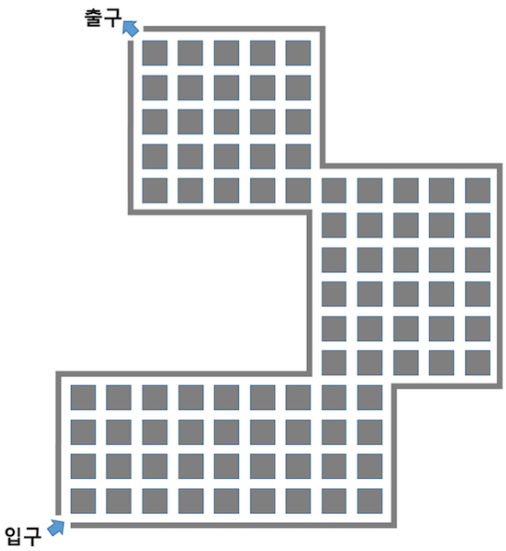
정점이 N개이고 지름이 K인 무향 단순 연결 그래프가 가질 수 있는 간선의 최소 개수를 $f(N, K)$라고 하자.

그래프의 지름은, 서로 다른 두 정점 사이의 최단 거리들 중 최댓값이다.

$f(10, 1) + f(10, 2) + f(10, 3)$은?

2. 길 찾기 (5점)

아래 그림과 같은 통로에 왼쪽 아래 화살표 위치에서 들어가서 왼쪽 위 화살표 위치로 나올 때, 이 과정에서 통로 안에서 지나가는 경로가 다양하게 존재한다. 통로를 구성하는 정사각형의 회색 기둥은 가로 세로 길이가 모두 동일하며 통로의 폭은 무시할 때, 입구에서 출구를 잇는 최단 경로는 몇 가지인가?



3. 키 순서 (5점)

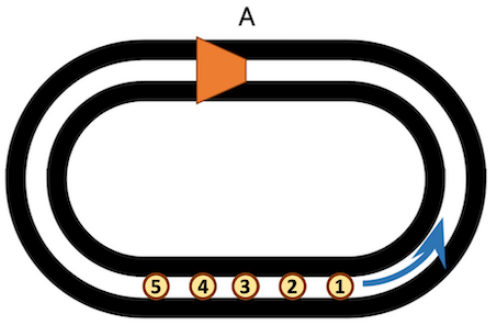
5명의 학생 A, B, C, D, E가 있는데, 이들은 모두 키가 다르다. 이 학생들의 키를 비교해 보았을 때 다음과 같은 결과를 얻었다. 이 외의 결과는 논리적으로 유추할 수 있는 것 이외에는 알 수 없다.

- A가 B보다 크다.
- B가 C보다 크다.
- E가 B보다 크다.
- D가 C보다 크다.

학생들을 키가 커지는 순서대로 줄을 세우는 서로 다른 방법은 몇 가지인가?

4. 위치 찾기 (5점)

아래 그림처럼 폭이 좁아 앞 사람을 추월할 수 없는 트랙이 있고, 이 트랙의 A 위치에는 거대한 문이 있어 문 앞에 도착한 사람은 주어진 수만큼의 문제를 풀어야만 문을 열고 지나갈 수 있다. 처음 문제를 푸는 사람에게는 한 문제만 주어지지만, 다음 사람부터는 바로 앞 사람에게 주어진 문제 수보다 한 문제씩 더 많이 주어진다. 다만, 주어지는 문제 수가 어떤 정해진 정수 T보다 커지면 다시 문제 수는 한 문제가 된다. 즉, 자신의 바로 직전 사람에게 주어진 문제 수가 T였다면 한 문제가 주어진다.



트랙에는 모두 다섯 명의 사람이 ①번부터 ⑤번까지 한 명씩 위치해서 반시계 방향으로 돌게 된다. 1번부터 10000번까지 번호가 정해진 문제가 1번부터 순서대로 주어지며, 모든 문제의 내용은 이미 공개되어 있다. $T = 14$인 경우, 2023번 문제를 풀려면 처음에 몇 번 자리에 위치해야 하는가?

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

5. 식의 성질 (5점)

다음 두 식 P : $(A \text{ AND } B) \rightarrow C$, Q : $(\text{NOT } C \rightarrow \text{NOT } A)\text{OR } (\text{NOT } C \rightarrow \text{NOT } B)$에 대해서, 다음 중 어느 것이 참인가? A, B, C는 모두 명제를 나타내는 문자이다.

- P와 Q는 동일하다.
- P ⇒ Q이지만 Q ⇒ P는 아님
- Q ⇒ P이지만 P ⇒ Q는 아님
- P는 Q와 항상 반대값을 가진다.

6. KOI 문자열 (9점)

길이가 L인 문자열 S에서 $L-3$개의 문자를 제거하여 문자열 `KOI` 를 만들 수 있다면, S는 **KOI 문자열**이다.

예를 들어 `KOI`, `OKIOKI` 는 KOI 문자열이고, `IOI`, `KIOK` 는 KOI 문자열이 아니다.

세 개의 문자 `K`, `O`, `I`로만 구성된 길이가 12인 문자열은 총 3^{12}개 있다.

이 중에, KOI 문자열이 **아닌** 문자열의 개수는 $2^n \times m$ (n은 음이 아닌 정수, m은 홀수)이다.

$n+m$의 값은?

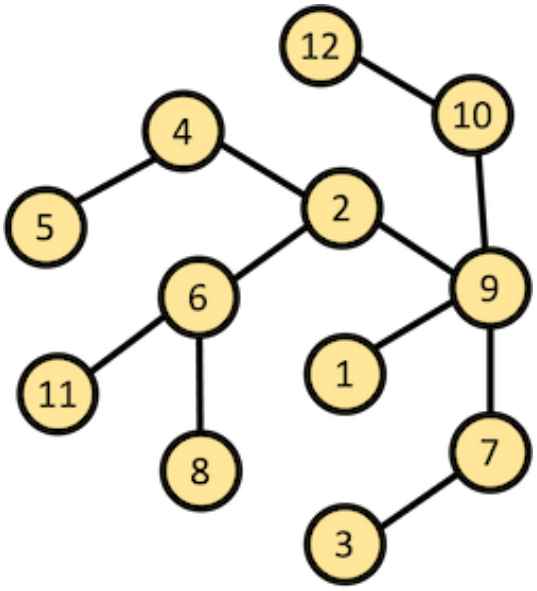
7. 받아올림 (9점)

받아올림(carry)은 두 자연수를 더하는 과정에서 같은 자리 수끼리의 합이 10 이상이면 바로 윗 자리로 10을 올려주는 것을 뜻한다. 이때 바로 윗 자리의 수는 1 커진다.

다음 1 001개의 정수 중 바로 연속한 두 수를 더할 때 받아올림이 일어나지 **않는** 쌍은 총 몇 개인가?

- 1000, 1001, 1002, …, 1999, 2000

8. 트리 위의 모임 (9점)



위의 그림과 같은 트리 위의 세 사람이 세 정점 a, b, c 위에 한 명씩 서 있다. 이 세 사람이 한 정점에서 모이려면, 정점 v를 택해서, 각자 정점 v로 최단 거리로 이동해야 한다. 이 때 이동해야 하는 최단 거리의 합을 $f(a, b, c)$ 라고 하자.

즉, $d(i, j)$가 정점 i와 정점 j 사이의 최단 거리라면, $f(a, b, c) = \min_v\{d(v, a) + d(v, b) + d(v, c)\}$ 이다.

모든 $1 \leq a < b < c \leq 12$ 쌍에 대해, $f(a, b, c)$ 의 값을 모두 합치면 얼마인가?

9. 리그전 (9점)

A, B, C, D 네 팀으로 이루어진 축구 리그가 있다. 각 팀은 다른 팀과 정확히 한 번씩 경기를 하며, 전체 경기 수는 6이다. 각 경기의 결과는 승, 패, 무승부 셋 중 하나이다. 모든 경기가 끝났을 때, 각 팀의 승패 결과는 다음과 같다.

- D는 C보다 더 많은 경기에서 승리했다.
- B는 C보다 더 많은 경기에서 패했다.
- A와 D는 모두 패가 없고, 승, 무승부 수는 정확히 동일하다.

그렇다면 A와 C의 경기 결과는 다음 중 어느 것인가?

⑴ A가 반드시 이겼다

⑵ A가 반드시 비겼다

⑶ A가 이기거나 비겼다

⑷ A가 비기거나 졌다

10. 쪽지 시험 (10점)

정보 교과 수업을 듣는 7명의 학생이 있다. 이 중 4명은 수강생이고, 다른 3명은 청강생이다.

오늘 수업 시작 직전에 쪽지 시험을 치러서, 각 학생이 시험지 하나씩을 풀었다.

교수님은 이제 각 학생이 시험지를 하나씩 맡아서 채점을 하게 하고자 한다.

수강생은 자기 자신의 시험지를 채점할 수 없으나, 청강생은 자기 자신의 시험지를 채점해도 된다.

시험지를 분배하는 $7! = 5\,040$가지의 방법 가운데, 이러한 조건을 만족하는 방법의 수는?

11. 보물 상자 (14점)

전설에 따르면 바닷속에 묻혀 있는 5개의 상자 A, B, C, D, E 중 하나에 보물이 들어 있다고 한다.

각 상자에 보물이 들어 있을 확률과, 바닷속에서 각 상자를 꺼내기 위해 필요한 비용은 아래 표와 같다.

상자 이름	보물이 있을 확률	꺼내는 비용(달러 단위)
A	10%	500
B	15%	600
C	25%	900
D	15%	700
E	35%	1,500

보물을 찾기 위해서 아래와 같이 수색을 진행하고자 한다.

1. 아직 바닷속에 묻혀 있는 상자 중 하나를 골라서 꺼낸다. 상자를 꺼내는 데에 위 표에서 제시된 만큼의 비용이 필요하다.
2. 꺼낸 상자를 열어 본다.
3. 만약 상자 속에 보물이 들어 있으면 수색을 멈추고, 보물이 없으면 1번으로 돌아간다.

1번 절차에서 꺼낼 상자를 잘 선택해서, 보물을 찾기 위해 필요한 총 비용의 **기댓값**을 **최소화**하고자 한다.

총 비용의 기댓값의 최솟값을 X달러라고 하자. X는 정수이다. X의 값은?

12. 약수 게임 (14점)

두 사람 A와 B가 다음과 같은 게임을 한다.

처음에 탁자 위에 n개의 조약돌이 있다.

A부터 시작해서 번갈아 가면서 게임을 진행한다. 자신의 차례에 탁자 위에 k개의 조약돌이 있다면, 2 이상 $k-1$ 이하인 k의 약수 d를 원하는 대로 골라서, d개의 조약돌을 가져가야 한다. 그러한 약수 d가 존재하지 않아서 더 이상 조약돌을 가져갈 수 없는 사람이 진다.

A와 B 모두 항상 자신이 이기기 위해 최선을 다한다.

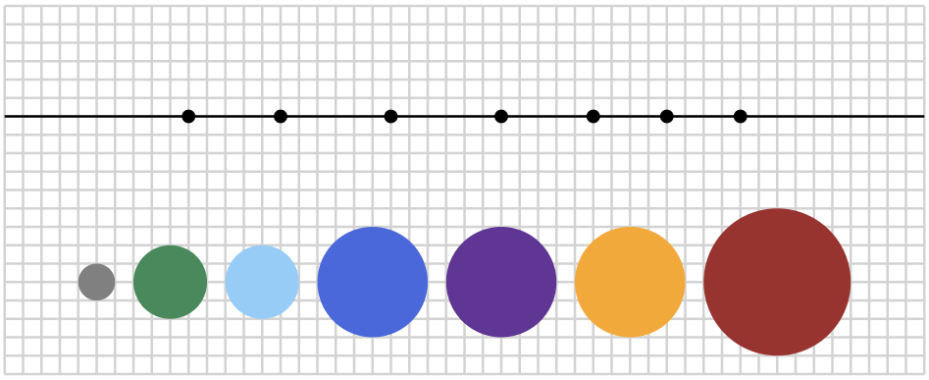
1 이상 1 000 이하의 모든 자연수 n 가운데, 위와 같은 게임에서 A가 이기도록 하는 n의 개수는?

13. 원판 배치하기 (8점)

다음과 같이 수직선에 7개의 점이 있고, 7개의 원판이 주어져 있다. 여러분은 원판의 중심을 각 점 위에 하나씩 위치시켜야 한다. 단, 이웃한 두 원판은 서로 외접해야 한다. (두 원판이 서로 외접한다는 것은 두 원판의 반지름의 합이 중심 사이의 거리와 같음을 의미한다.)

원판을 드래그하여 원하는 점으로 옮길 수 있다. 모든 원판을 조건에 맞게 배치하는 데 성공했다면 반드시 '제출' 버튼을 눌러 답안을 제출해야 한다.

조건에 맞게 원판을 배치하는 방법이 여러 가지라면, 그중 어떠한 것을 선택해도 좋다.



14. 2층 (11점)

2개의 행과 15개의 열로 이루어진 표가 있다.

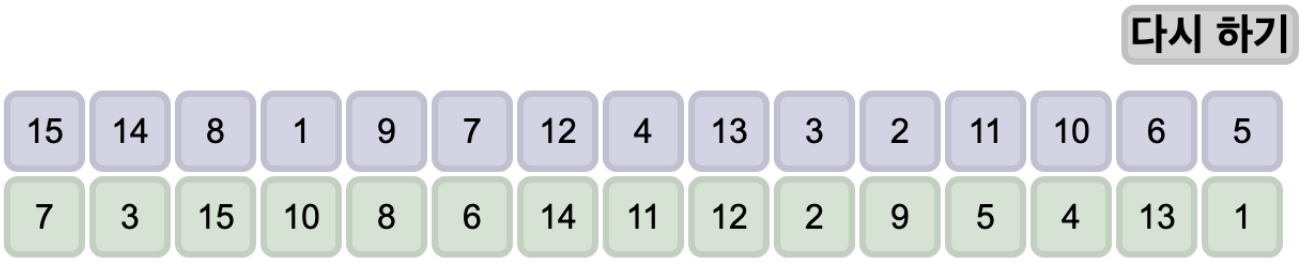
첫 번째 행의 칸들에는 1부터 15까지의 정수가 한 칸에 하나씩 들어있다. 두 번째 행의 칸들도 마찬가지이다.

주어지는 표에서 같은 열의 두 칸에 있는 값을 교환하는 작업을 수행할 수 있다.

여러분의 목표는 최소 횟수의 작업으로 원래 표와 다르면서 각 행에 중복되는 값이 없는 표를 만드는 것이다.

표의 칸을 클릭하여 같은 열 다른 행의 칸과 값을 교환할 수 있다. “다시 하기” 버튼을 눌러 언제든 초기 상태에서 문제를 다시 해결할 수 있다.

목표를 달성했다면 **반드시 제출**을 해야 득점할 수 있다.



15. 합이 0 (11점)

N개의 정수를 가진 수열 A[1], A[2], . . . , A[N]이 주어진다.

수열을 여러 개의 부분으로 분할하려 한다. 제일 앞의 부분과 제일 뒤의 부분을 제외하고, 각각의 부분에 있는 수들의 합은 0이여야 한다. 물론, 가장 앞 부분 또는 가장 뒷 부분의 수들의 합이 0인 경우도 가능하다.

합이 0인 부분의 개수 (부분에 속한 인덱스의 개수가 아니라, 나누어진 부분의 개수를 뜻함에 유의하라)가 가장 많도록 수열을 분할하라.

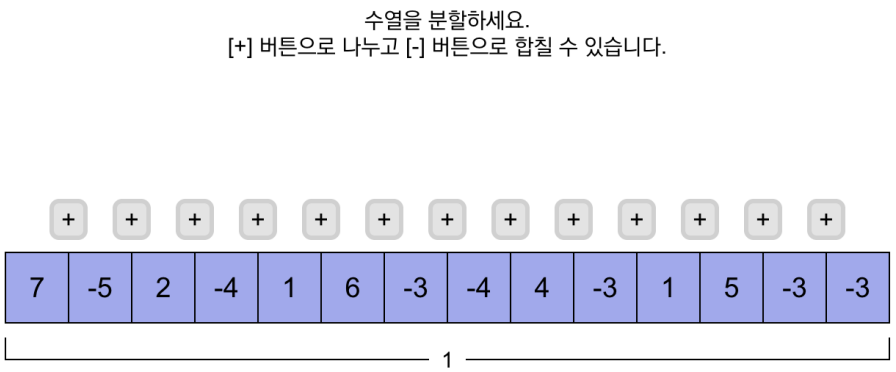
아래 그림에서 + 버튼을 누르면 수열의 해당 부분을 나눌 수 있고, - 버튼을 누르면 수열의 해당 부분을 합칠 수 있다. 수열의 각 부분이,

- 수들의 합이 0이면 하얀색
- 수들의 합이 0이 아니지만, 가장 앞 부분이거나 가장 뒷 부분이면 파란색
- 수들의 합이 0이 아니고, 가장 앞 부분 또는 가장 뒷 부분이 아니면 빨간색

의 배경으로 표시된다.

빨간색 배경의 부분이 없을 경우, 제출할 수 있다.

이 때, 하얀색 배경의 부분의 개수(부분에 속한 칸의 개수가 아님에 유의하라)가 가능한 가장 많다면, 점수의 100%를 받을 수 있다. 그렇지 않다면, 점수의 0%를 받는다.



16. Max-plus tree (13점)

아래와 같이 루트가 있는 트리가 하나 주어진다. 아래 그림에서 가장 위에 있는 정점이 루트 정점, 아래에 있는 16개의 팔각형 형태 정점이 리프 정점이다.

리프 정점이 아닌 정점, 즉 14개의 내부 정점은 각각 max 정점 또는 plus 정점 중 하나로 지정되어 있다. max 정점은 원, plus 정점은 사각형, 리프 정점은 팔각형으로 표시한다.

각 정점의 값은 리프 정점에 배정된 값에 따라 결정된다. 리프 정점의 값은 리프 정점에 배정된 수이고, max 정점의 값은 자식 정점들의 값의 최댓값이며, plus 정점의 값은 자식 정점들의 값의 합이다.

당신은 16개의 수를 리프 정점에 배치해서 루트 정점의 값을 최대화해야 한다.

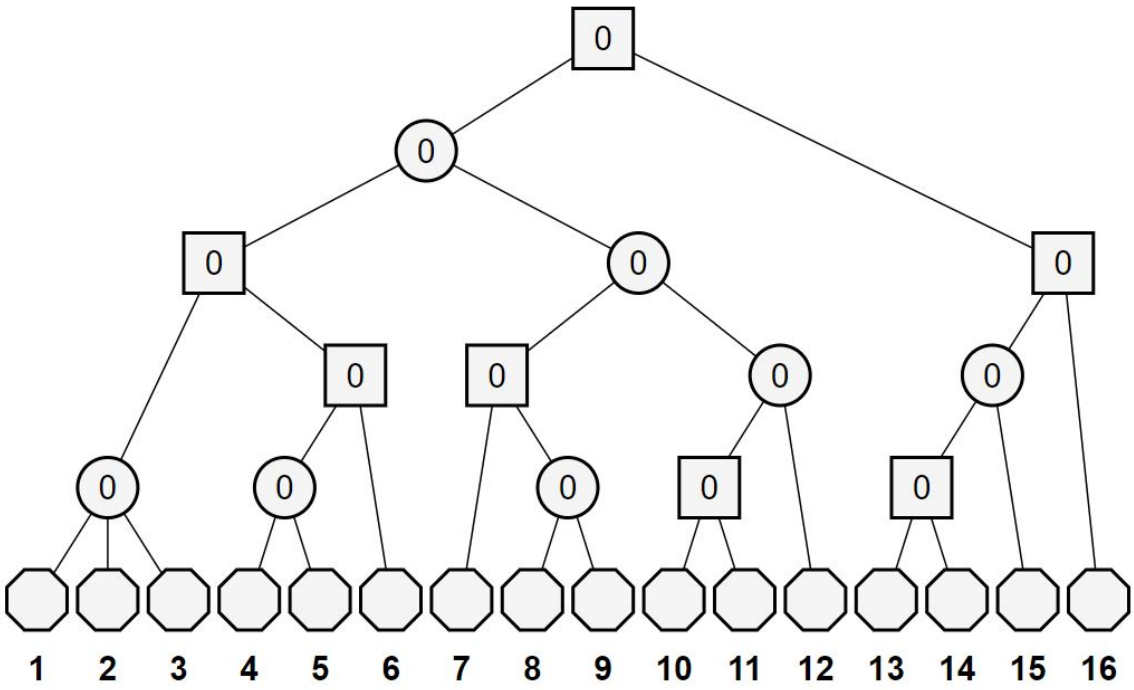
아래에서 직접 리프 정점에 수를 배치할 수 있다. 하단에 있는 수를 마우스로 드래그해서 리프 정점에 배치할 수 있다. 각 수는 최대 한 번씩 사용할 수 있다. 수를 리프 정점 바깥으로 이동시키면 수를 제거할 수 있다.

각 정점의 값은 정점 도형 안에 표시된다. 만약 리프 정점에 수가 배치되지 않았다면 그 정점의 값은 0으로 취급한다.

모든 리프 정점에 수가 배치되지 않은 경우 점수를 받지 못함에 주의해야 한다.

채점 방식

모든 리프 정점에 수가 배치되었고 루트 정점의 값이 최대이면 전체 점수의 100%를 받는다.



※ 아직 리프 정점이 모두 채워지지 않았습니다.

17. 벌집 채우기 (13점)

아래와 같이 벌집 모양의 육각형 판이 있다.

먼저, 당신이 육각형 판에서 몇 개의 칸을 색칠해야 한다.

다음으로, "시뮬레이션 시작하기" 버튼을 누르면, 컴퓨터는 다음과 같은 과정을 계속해서 수행할 것이다.

- 각각의 칸에 대해, "인접한 여섯 개의 칸들 중 세 개 이상이 색칠되어 있으면, 자신을 색칠한다" 를 시행한다.

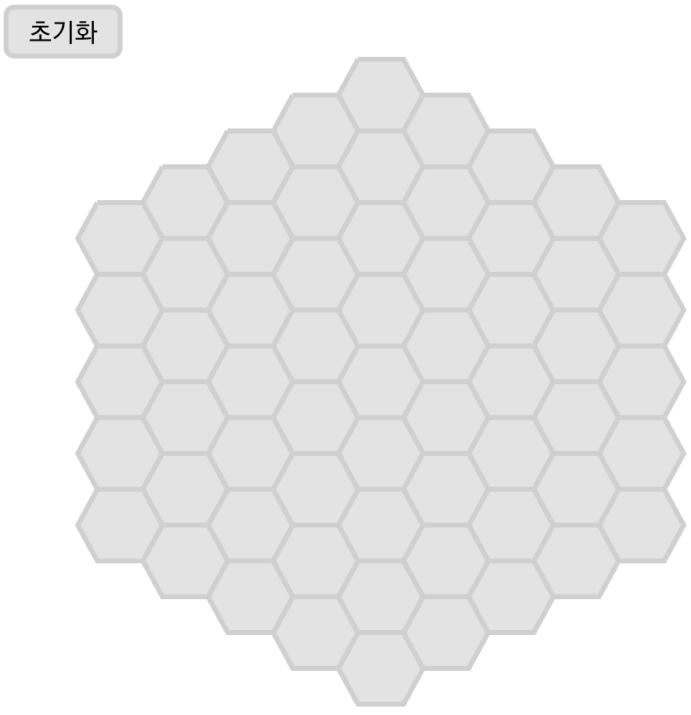
당신이 색칠한 육각형 판에서 시작해서, 위 과정을 충분히 반복해서 수행한 뒤에는, 육각형 판에 있는 모든 칸을 색칠하는 데 성공해야 한다. 그리고 시뮬레이션을 시작하기 전 당신이 직접 색칠한 칸의 개수를 최소화해야 한다. 어떻게 해야 하는가?

모든 칸을 색칠하는 데 성공한 뒤 제출 버튼을 누르면, 다음과 같은 방법으로 계산된 점수를 받는다.

시뮬레이션을 시작하기 전 색칠한 칸의 개수를 x, x의 가능한 최솟값을 m이라고 하자.

- $x = m$ 이라면, 전체 점수의 100%를 받는다.
- $x = m + 1$이라면, 전체 점수의 $1/2$을 받는다.
- $x = m + 2$이라면, 전체 점수의 $1/5$를 받는다.
- $x > m + 2$이라면, 전체 점수의 0%를 받는다.

제출하지 않으면 득점할 수 없음에 유의하라.



18. 팀원 찾기 (15점)

문제 설명

$2N$명의 사람들이 원탁에 둘러앉아 있다. 이 사람들이 두 명씩 짝을 지어 N개의 팀을 이루었다.

하나의 팀에 속한 두 사람이 원탁에서 인접한 자리에 앉도록 하고 싶다. 이를 위해, 다음 동작을 반복할 수 있다. * 인접한 두 자리에 앉은 사람들이 일어나 서로 자리를 바꾼다.

여러분은 이 동작을 최소한으로 수행해 목표를 달성해야 한다.

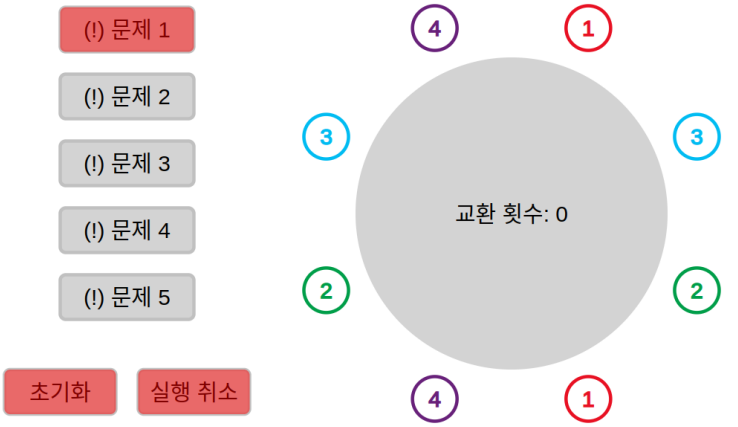
아래 그림에서 숫자가 적힌 원은 사람을 나타내고, 원 안의 숫자는 그 사람이 속한 팀의 번호를 나타낸다. 인접한 두 사람 사이를 클릭해 두 사람의 자리를 바꿀 수 있다.

채점 방식

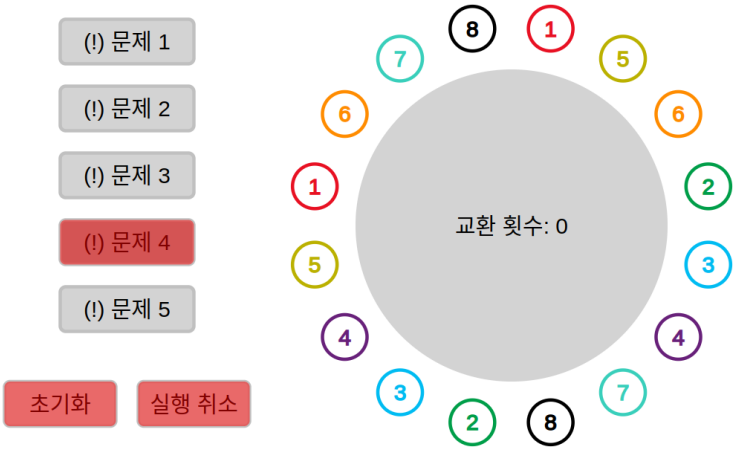
총 다섯 개의 문제가 주어진다. 각 문제를 해결하면 20%의 점수를 받을 수 있다.

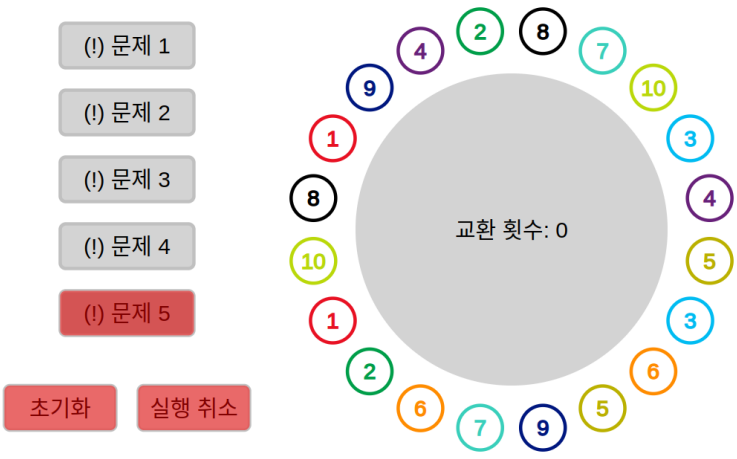
주의사항

점수를 얻기 위해서는 반드시 제출 버튼을 눌러 제출해야 한다. 제출 버튼을 누르면 현재 상태가 저장된다.



(!) 문제 1
(!) 문제 2
(!) 문제 3
(!) 문제 4
(!) 문제 5
초기화
실행 취소
교환 횟수: 0


(!) 문제 1
(!) 문제 2
(!) 문제 3
(!) 문제 4
(!) 문제 5
초기화
실행 취소
교환 횟수: 0


(!) 문제 1
(!) 문제 2
(!) 문제 3
(!) 문제 4
(!) 문제 5
초기화
실행 취소
교환 횟수: 0

19. ABBC (15점)

아직 간선의 방향이 정해지지 않은, 무향 그래프가 주어진다.

다음 조건을 모두 만족하는 세 정점쌍 (a, b, c)의 개수를 **ABBC**라고 하자.

- 조건 1) 세 정점 a, b, c는 서로 달라야 한다.
- 조건 2) 정점 a에서 정점 b로 가는 간선이 존재한다.
- 조건 3) 정점 b에서 정점 c로 가는 간선이 존재한다.

당신의 목표는, **ABBC**의 값을 **최대화**하는 것이다.

이를 위하여 당신은 **모든** 간선의 방향을 결정해야 한다. 간선을 클릭하면 간선의 방향을 설정할 수 있다.

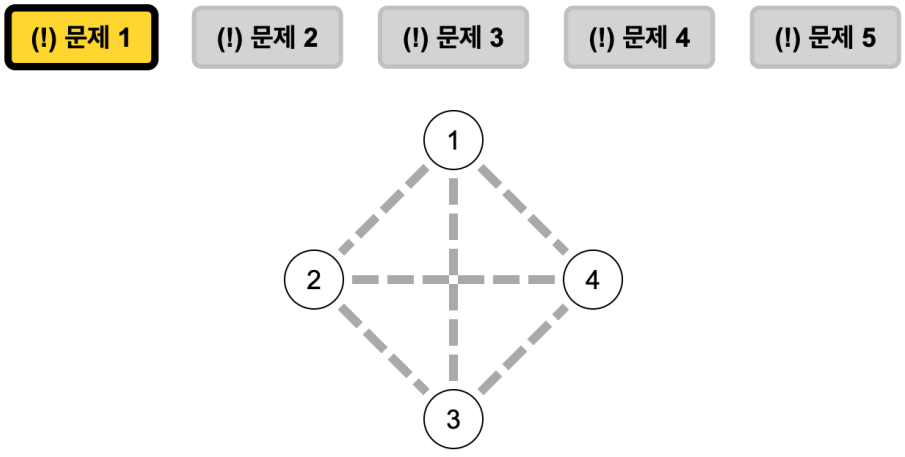
당신은 총 다섯 개의 부분 문제를 해결해야 한다. 부분 문제는 상단의 "문제 x" 버튼을 눌러서 선택할 수 있다.

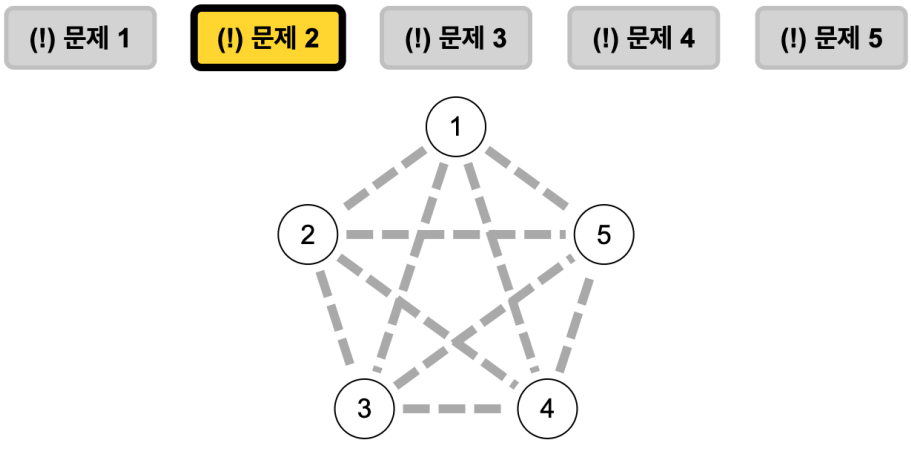
채점 방식

다섯 문제를 모두 해결하지 않아도 부분 점수를 받을 수 있다.

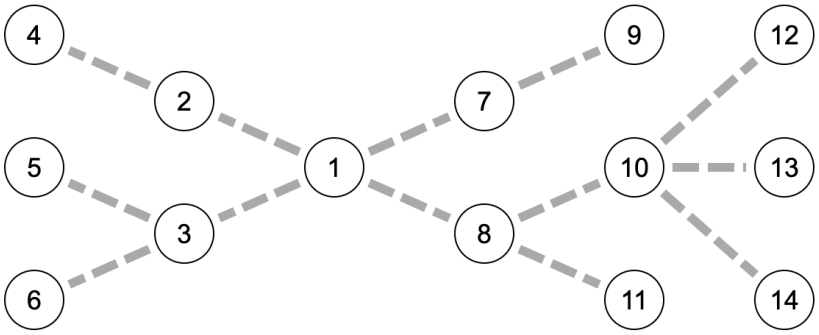
각 문제에서 목표를 달성하면, 각각 전체 점수의 20%를 받는다.

목표를 달성했다면 **반드시 제출**을 해야 득점할 수 있다.

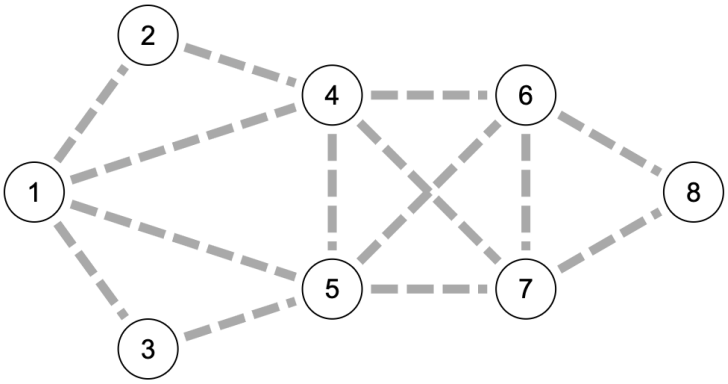




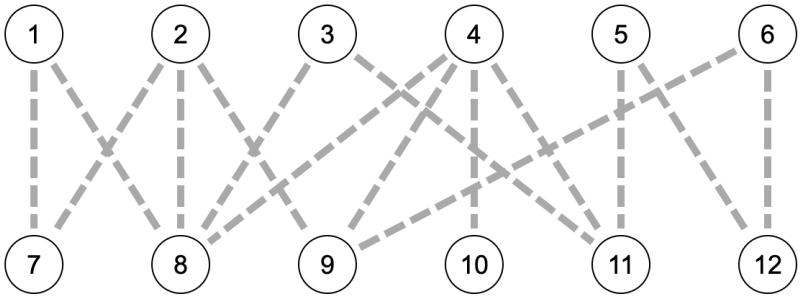
(!) 문제 1 (!) 문제 2 **(!) 문제 3** (!) 문제 4 (!) 문제 5



(!) 문제 1 (!) 문제 2 (!) 문제 3 **(!) 문제 4** (!) 문제 5



(!) 문제 1 (!) 문제 2 (!) 문제 3 (!) 문제 4 **(!) 문제 5**



20. 교집합과 격자판 (15점)

문제 설명

크기가 4인 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$의 서로 다른 부분집합은 총 $2^4 = 16$개 존재한다.

여러분에게 16×16 크기의 격자판이 주어진다. 격자판의 각 행에는 $\{1, 2, 3, 4\}$의 서로 다른 부분집합이 하나씩 겹치지 않게 배정되어 있다. 격자판의 각 열에 대해서도 마찬가지이다.

격자판의 각 칸은 다음과 같은 조건을 만족하면 색칠되고, 만족하지 않으면 색칠되지 않는다.

- 칸이 위치한 행에 배정된 부분집합과 열에 배정된 부분집합의 교집합이 공집합이 아니다 (즉, 두 집합의 공통 원소가 존재한다).

격자판의 초기 상태는 오른쪽에 주어져 있다. 여러분은 오른쪽 격자판을 왼쪽 격자판과 같이 만들어야 한다. 즉, 왼쪽 격자판에서 색칠된 칸은 오른쪽 격자판에서도 색칠되어 있어야 하며, 왼쪽 격자판에서 색칠되지 않은 칸은 오른쪽 격자판에서도 색칠되어 있지 않아야 한다.

기능

오른쪽 격자판에서 현재 각 행과 열에 배정된 부분집합이 무엇인지 확인할 수 있다. 집합의 각 원소는 서로 다른 색으로 표시되어 있다.

오른쪽 격자판에서 서로 다른 두 행을 연속해서 클릭하면 두 행에 배정된 부분집합을 서로 바꿀 수 있다. 열에 대해서도 마찬가지이다.

두 격자판에서 같은 행 또는 같은 열을 두 번 연속해서 클릭하면 그 행 또는 열을 밝게 표시할 수 있다. 다시 두 번 연속해서 클릭하면 원래대로 돌아간다.

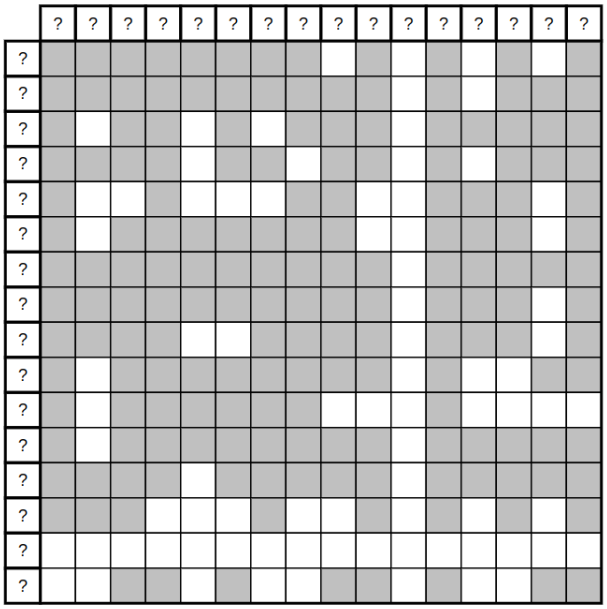
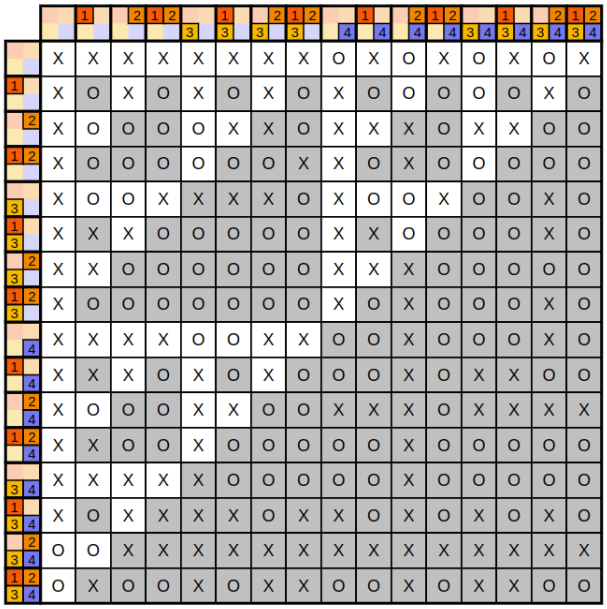
오른쪽 격자판의 칸에 마우스를 올리면 칸이 위치한 행에 배정된 부분집합과 열에 배정된 부분집합의 교집합이 무엇인지 확인할 수 있다.

제출 버튼을 누르면 격자판의 현재 상태가 저장된다. 만약 여러분이 오른쪽 격자판의 모든 칸을 왼쪽 격자판과 같이 만들었다면 만점을 받는다.

주의사항

만약 오른쪽 격자판을 왼쪽 격자판과 같이 만드는 방법이 여러 가지라면, 그 중 어떠한 방법을 선택해도 좋다.

최소 횟수로 교환할 필요는 없다.

오른쪽 격자판의 모든 칸을 왼쪽 격자판과 같이 만들었다면, 반드시 제출 버튼을 눌러 제출해야 한다.

올바른 칸: 136 / 256