"고등부 3번. 보급" 문제 풀이

작성자: 윤교준

부분문제 1

$\{V_i\}_{i=1}^{N}$는 1 이상 N 이하로 이루어진 순열이라야 한다.

모든 $N!$ 가지의 순열을 시도하여 가능한 보급 날짜 배정을 구한다.

부분문제 4

일반성을 잃지 않고 X_*를 정렬하여, $X_i = i$ $(1 \le i \le N)$라고 가정하자.

$\zeta := \{(i,j) : i < j, Y_i < Y_j\}$라고 하자.

순서쌍 $(i,j) \in \zeta$을 생각하자. $A_i \le V_i < V_j \le B_j$라야 하므로, $A_i < A_j$와 $B_i < B_j$라고 할 수 있다.

다음을 수행한다.

1. 각 $i = 1, 2, \cdots, N$에 대하여
   (a) $A_i := \max\left\{A_i, \left(\max_{j<i, Y_j<Y_i} A_j\right) + 1\right\}$로 값을 바꾼다
2. 각 $i = N, N-1, \cdots, 1$에 대하여
   (a) $B_i := \min\left\{B_i, \left(\min_{i<j, Y_i<Y_j} B_j\right) - 1\right\}$로 값을 바꾼다

위 작업은 Fenwick 또는 Segment 트리를 이용하여 $\mathcal{O}(N \lg N)$에 수행할 수 있다.

이제, $V_i \in [A_i, B_i]$가 성립하도록 각 V_i에 서로 다른 값을 부여해야 한다. 이는 '회의실 배정 문제'로 잘 알려진 문제이다.

값 $k = 1, 2, \cdots, N$를

(1) 아직 값이 배정되지 않은 V_i 중에서

(2) $A_i \le k$를 만족하는 것 중

(3) B_i의 값이 가장 작은

V_i에 배정하는 Greedy 알고리즘이 정당함을 증명할 수 있다.

이러한 배정 작업은 Min heap을 이용하여 $\mathcal{O}(N \lg N)$에 수행할 수 있다.

만약 배정이 불가능하다면, 원 문제의 답은 "`NO`"이다. 배정이 가능하다면, 그러한 V_i는 항상 원 문제의 모든 조건을 만족한다.

따라서, 전체 문제를 $\mathcal{O}(N \lg N)$에 해결할 수 있다.

부분문제 2

만점 풀이에서 'A_i, B_i의 값을 바꾸는 과정' 또는 '회의실 배정 문제'를 나이브한 방법으로 $\mathcal{O}\left(N^2\right)$에 해결할 경우, 부분문제 2까지 맞을 수 있다.

부분문제 3

만점 풀이에서 B_i의 값을 바꾸는 과정을 수행하지 않거나 회의실 배정 문제를 올바르지 않은 방법으로 해결할 경우, 부분문제 3까지 맞을 수 있다.