"초등부 2번. 조약돌" 문제 풀이

작성자: 윤교준

부분문제 1

손으로 경우의 수를 분석하여 최적의 전략을 하드코딩한다.

부분문제 2

작업 1을 어떤 장소에 대하여 언제 수행할 지 등을 완전 탐색하여 최적의 전략을 알아낸다.

부분문제 3

i번째 장소에 놓인 조약돌의 개수를 $A[i]$라고 하자. $(1 \leq i \leq N)$

다음과 같이 DP $P[i][j]$ $(1 \leq i < j \leq N)$를 정의하자.

i번째 장소부터 j번째 장소까지 오직 작업 1만 수행하여 조약돌을 모두 가져갈 수 있다면 $P[i][j] = 1$,
아니면 $P[i][j] = 0$.

즉, 다음을 차례대로 수행했을 때, $A[i], \cdots, A[j]$가 모두 0이 되면 $P[i][j] = 1$, 아니면 $P[i][j] = 0$.

- i번째 장소와 $(i+1)$번째 장소에서 각각 $\min\{A[i], A[i+1]\}$개의 조약돌을 가져간다.
- $(i+1)$번째 장소와 $(i+2)$번째 장소에서 각각 $\min\{A[i+1], A[i+2]\}$개의 조약돌을 가져간다.
- $\cdots$
- $(j-1)$번째 장소와 j번째 장소에서 각각 $\min\{A[j-1], A[j]\}$개의 조약돌을 가져간다.

$P[i][j]$는 $\mathcal{O}(j-i+1)$에 계산할 수 있다. 고로, $P[*][*]$의 모든 값은 $\mathcal{O}\left(N^3\right)$에 구할 수 있다.

이제, DP $D[i]$ $(0 \leq i \leq N)$를 정의하자.

$D[i] :=$ 첫 번째 장소부터 i번째 장소까지 모든 조약돌을 가져가기 위해 필요한 최소 작업 횟수

다음을 증명할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&D[0] = 0 \\
&D[1] = 1 \\
&D[i] = \min\left\{D[i-1]+1, \min_{1 \leq j < i, P[j][i]=1} (D[j-1]+i-j)\right\} \quad (2 \leq i \leq N)
\end{aligned}
$$

마지막 식에서 $(D[i-1]+1)$ 항은 i번째 장소에 놓인 조약돌을 작업 2로 가져가는 것을, $(D[j-1]+i-j)$ 항은 j번째부터 i번째 장소까지 모든 조약돌을 $(i-j)$번의 작업 1로 가져가는 것을 나타낸다.

$D[i]$는 $\mathcal{O}(i)$에 계산할 수 있다. 고로, $D[*]$의 모든 값은 $\mathcal{O}\left(N^2\right)$에 구할 수 있다. 답은 $D[N]$이다.

따라서, 문제를 $\mathcal{O}\left(N^3\right)$에 해결할 수 있다.

부분문제 4

$X := \max_{1 \le i \le N} A[i]$라고 하자.

편의상 $A[0] = 0$라고 하자. 다음과 같이 DP $G[i][j], G'[i][j]$ $(0 \le i \le N, 0 \le j \le A[i])$를 정의하자.

$\mathrm{Goal}[i][j] :=$ 첫 번째부터 $(i-1)$번째 장소까지 조약돌이 모두 없고, i번째 장소에 정확히 j개의 조약돌이 있는 상황

$G'[i][j] :=$ j번째 장소에 작업 2를 수행하지 않고, $\mathrm{Goal}[i][j]$을 만들기 위하여 필요한 최소 작업 횟수

$G[i][j] :=$ $\mathrm{Goal}[i][j]$을 만들기 위하여 필요한 최소 작업 횟수

다음을 증명할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
G[0][0] &= 0 \\
G'[i][A[i]] &= G[i-1][0] && (1 \le i \le N) \\
G'[i][A[i]-x] &= G[i-1][x] + 1 && (1 \le i \le N, 1 \le x \le \min\{A[i-1], A[i]\}) \\
G[i][j] &= \min\left\{G'[i][j], 1 + \min_{j < x \le A[i]} G'[i][x]\right\} && (1 \le i \le N, 0 \le j \le A[i])
\end{aligned}
$$

마지막 식에서 $\left(\min_{j<x\le A[i]} G'[i][x]\right)$ 항은 배열 $G'[i]$의 최솟값 부분 배열 (Prefix minimum array)을 통해 상수 시간에 알아낼 수 있다.

DP의 각 값을 $\mathcal{O}(1)$에 알아낼 수 있으므로, 전체 배열을 $\mathcal{O}(NX)$에 계산할 수 있다.

문제의 답은 $G[N][0]$이다. 시간 복잡도는 $\mathcal{O}(NX)$.

부분문제 5

부분문제 3의 풀이를 개선하자.

배열 $P[j][*]$의 모든 값을 $\mathcal{O}(N)$에 계산할 수 있다. 이는 $P[*][*]$ 정의에 서술한 '조약돌 가져가기' 과정을 직접 차례대로 실행해봄으로써 쉽게 할 수 있다.

따라서, 전체 문제를 $\mathcal{O}(N^2)$에 해결할 수 있다.