

“헬기 착륙장” 문제 풀이

부분문제 1, 2

크기가 정확히 k 인 헬기 착륙장의 개수는 2^k 이다. 각각의 동심원마다 어떤 색을 칠할 지 결정하는 방법이 두 가지이고, 그 선택이 서로 독립적이기 때문이다.

또한, 크기가 정확히 k 인 헬기 착륙장을 색칠하기 위해서는 총 $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ 통의 페인트가 필요하다.

현재 $a + b$ 통의 페인트를 가지고 있으므로, $\frac{k(k+1)}{2} \leq a + b$ 이어야 한다. 이 부분문제에서는 $a + b \leq 100 + 100 = 200$ 이므로, $k \leq 19$ 임을 알 수 있다.

따라서 모든 크기가 19 이하인 헬기 착륙장들 (총 $2^1 + 2^2 + \dots + 2^{19}$ 개)을 순회하면서, 사용하는 빨강 페인트가 a 통 이하이고 파랑 페인트가 b 통 이하인 것의 개수를 세면 된다.

부분문제 3

앞선 부분문제에서 한 관찰에 의해, 헬기 착륙장의 크기 k 는 대략 $\sqrt{2(a+b)}$ 이하여야 함을 알 수 있다.

$\text{ways}[k][i][j]$ 를 크기가 정확히 k 인 헬기 착륙장 중 빨강 페인트를 정확히 i 통 사용하고, 파랑 페인트를 정확히 j 통 사용하는 헬기 착륙장의 수라고 정의하자.

기저사례는 $\text{ways}[1][1][0] = \text{ways}[1][0][1] = 1$, 그 외의 $\text{ways}[1][i][j] = 0$ 이다.

$k \geq 2$ 인 경우, 크기가 정확히 k 인 헬기 착륙장 중 빨강 페인트를 정확히 i 통 사용하고, 파랑 페인트를 정확히 j 통 사용하는 방법은, 반지름이 k 인 동심원이 무슨 색인지에 따라 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

- 빨강색인 경우: 크기가 $k - 1$ 이고 빨강 페인트를 $i - k$ 통, 파랑 페인트를 j 통 사용한 헬기 착륙장에, 반지름이 k 인 빨강색 원을 추가한 것이다. 경우의 수는 $\text{ways}[k - 1][i - k][j]$ 이다.
- 파랑색인 경우: 크기가 $k - 1$ 이고 빨강 페인트를 i 통, 파랑 페인트를 $j - k$ 통 사용한 헬기 착륙장에, 반지름이 k 인 파랑색 원을 추가한 것이다. 경우의 수는 $\text{ways}[k - 1][i][j - k]$ 이다.

따라서 $\text{ways}[k][i][j] = \text{ways}[k - 1][i - k][j] + \text{ways}[k - 1][i][j - k]$ 의 점화식이 성립한다.

원하는 것은 빨강 페인트를 a 통 이하, 파랑 페인트를 b 통 이하로 사용하는 모든 헬기 착륙장의 개수를 세는 것이므로, 정답은 $\sum_{k=1}^{90} \sum_{i=0}^a \sum_{j=0}^b \text{ways}[k][i][j]$ 이다.

모든 $k \leq \sqrt{2(a+b)} \approx 63$, $0 \leq i \leq a$, $0 \leq j \leq b$ 에 대해 ways 배열을 k, i, j 순서대로 계산할 수 있다. $k \cdot a \cdot b \leq 63 \cdot 1000 \cdot 1000 = 0.63 \times 10^8$ 이므로 제한 시간 내에 모두 계산 가능하며, 제한 메모리 안에 모든 값을 저장할 수 있다.

구현 시 아래 사항들을 주의해야 한다. 이후 부분문제들의 풀이는 아래 두 가지 주의사항을 염두에 두고 있다는 가정 하에 진행한다.

- i 또는 j 가 k 미만인 경우, 음수 인덱스를 참조하지 않도록 구현해야 한다.
- 헬기 착륙장의 수가 64비트 정수형의 범위를 넘을 수 있기 때문에, 덧셈을 할 때마다 $10^9 + 7$ 로 나눈 나머지를 취해야 한다.

부분문제 4

크기가 정확히 k 인 헬기 착륙장 중 빨강 페인트를 정확히 i 통 사용하고, 파랑 페인트를 정확히 j 통 사용하는 헬기 착륙장이 존재하려면, $i + j = \frac{k(k+1)}{2}$ 이어야 한다. 즉, i 와 j 가 결정되면 조건을 만족하는 k 의 값이 없거나, 유일하게 결정된다는 것을 알 수 있다.

이 점에서 착안해, $\text{ways}[i][j]$ 를 빨강 페인트를 정확히 i 통 사용하고, 파랑 페인트를 정확히 j 통 사용하는 헬기 착륙장의 수라고 정의하자. 앞선 부분문제와는 달리 k 가 상태 정의에서 제거되었다.

$i + j = \frac{k(k+1)}{2}$ 인 k 가 존재하지 않는다면, $\text{ways}[i][j] = 0$ 이다.

$i + j = \frac{k(k+1)}{2}$ 인 k 가 존재한다면, $\text{ways}[i][j] = \text{ways}[i][j - k] + \text{ways}[i - k][j]$ 이다.

원하는 것은 빨강 페인트를 a 통 이하, 파랑 페인트를 b 통 이하로 사용하는 모든 헬기 착륙장의 개수를 세는 것이므로, 정답은 $\sum_{i=0}^a \sum_{j=0}^b \text{ways}[i][j]$ 이다.

부분문제 5

크기가 정확히 k 인 헬기 착륙장 중 빨강 페인트를 정확히 i 통 사용하고, 파랑 페인트를 정확히 j 통 사용하는 헬기 착륙장이 존재하려면, $i + j = \frac{k(k+1)}{2}$ 이어야 한다. 즉 k 와 i 가 결정되면 $j = \frac{k(k+1)}{2} - i$ 이어야 한다.

$\text{ways}[k][i]$ 를 크기가 정확히 k 인 헬기 착륙장 중 빨강 페인트를 정확히 i 통 사용하고, 파랑 페인트를 정확히 $\frac{k(k+1)}{2} - i$ 통 사용하는 헬기 착륙장의 수라고 정의하자.

반지름이 k 인 동심원이 무슨 색인지에 따라 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

- 빨강색인 경우: 크기가 $k - 1$ 이고 빨강 페인트를 $i - k$ 통 사용한 헬기 착륙장에, 반지름이 k 인 빨강색 원을 추가한 것이다. 경우의 수는 $\text{ways}[k - 1][i - k]$ 이다.
- 파랑색인 경우: 크기가 $k - 1$ 이고 빨강 페인트를 i 통 사용한 헬기 착륙장에, 반지름이 k 인 파랑색 원을 추가한 것이다. 경우의 수는 $\text{ways}[k - 1][i]$ 이다.

따라서 $\text{ways}[k][i] = \text{ways}[k - 1][i - k] + \text{ways}[k - 1][i]$ 의 점화식이 성립한다.

원하는 것은 빨강 페인트를 a 통 이하, 파랑 페인트를 b 통 이하로 사용하는 모든 헬기 착륙장의 개수를 세는 것이다. $\text{ways}[k][i]$ 가 정답에 포함되려면, $i \leq a$ 과 $\frac{k(k+1)}{2} - i \leq b$ 가 동시에 성립하면 되므로, 이러한 (k, i) 쌍들을 모두 순회하면서 그 합을 구하면 된다.

$k \leq \sqrt{2(a + b)}$ 이므로, 총 시간복잡도는 $O(a\sqrt{a + b})$ 이다.

부분문제 6

부분문제 5에서와 같이 $\text{ways}[k][i]$ 배열을 모두 구해 놓았다고 가정한다. 여기까지 총 $O(\text{MAXA}\sqrt{\text{MAXA} + \text{MAXB}})$ 시간이 필요하다.

$\text{ways}[k][i]$ 가 정답에 포함되려면, $i \leq a$ 이고 $\frac{k(k+1)}{2} - i \leq b$ 가 성립해야 한다. 두 부등식을 i 에 대해서 정리하면 $\max\left(0, \frac{k(k+1)}{2} - b\right) \leq i \leq a$ 와 같이 표현된다.

즉, 헬기 착륙장의 크기를 k 로 고정하면, 이 중 정답에 포함되는 경우의 수는 $\sum_{i=\max\left(0, \frac{k(k+1)}{2} - b\right)}^a \text{ways}[k][i]$ 와 같이 $\text{ways}[k]$ 배열의 구간 합으로 표현할 수 있음을 알 수 있다.

$ways[k]$ 배열의 부분합 배열 $pref[k][i] = \sum_{z=0}^i ways[k][z]$ 를 구해 두면, 위의 값을 $pref[k][a] - pref[k][\max(0, \frac{k(k+1)}{2} - b) - 1]$ 로 나타낼 수 있으므로, 상수 시간에 구할 수 있다.

각각의 k 에 대해 상수 시간에 경우의 수를 구할 수 있으므로, 테스트 케이스 하나당 $O(\sqrt{a+b})$ 시간에 모든 경우의 수를 구할 수 있다.