"누적 거리" 문제 풀이

작성자: 이온조

부분문제 1

후보 모임 장소의 위치 q_j가 주어질 때마다 누적 거리 $f(q_j)$를 반복문을 이용하여 계산하면 $O(NQ)$의 시간복잡도로 부분문제 1을 해결할 수 있다.

부분문제 2

후보 모임 장소의 위치 q_j에 대해서, KOI 나라에 존재하는 마을들을 두 집합 S, T로 나누자. 집합 S에는 q_j보다 작거나 같은 좌표를 가진 마을들의 번호가 들어 있고, 집합 T에는 q_j보다 큰 좌표를 가진 마을들의 번호가 들어 있다. 이 때 누적 거리 $f(q_j) = \sum_{i=1}^{N} a_i|x_i - q_j|$에 대한 식을 다음과 같이 절댓값 기호 없이 풀어 쓸 수 있다.

$$f(q_j) = \sum_{i=1}^{N} a_i|x_i - q_j| = \sum_{s\in S} a_s(q_j - x_s) + \sum_{t\in T} a_t(x_t - q_j) = (\sum_{s\in S} a_s - \sum_{t\in T} a_t)q_j - \sum_{s\in S} a_s x_s + \sum_{t\in T} a_t x_t$$

좌표의 범위가 1부터 200 000까지이기 때문에, a_i에 대한 부분합 배열과 $a_i x_i$에 대한 부분합 배열을 미리 계산할 수 있다. $\sum_{s\in S} a_s$과 $\sum_{t\in T} a_t$는 a_i에 대한 부분합 배열을 사용해 $O(1)$ 시간에 계산할 수 있고, $\sum_{s\in S} a_s x_s$와 $\sum_{t\in T} a_t x_t$ 역시 $a_i x_i$에 대한 부분합 배열을 사용해 $O(1)$ 시간에 계산할 수 있다. 그러므로 $f(q_j)$ 역시 $O(1)$ 시간에 해결 가능하고, $O((\text{좌표 범위}) + N + Q)$ 시간에 부분문제 2를 해결할 수 있다.

부분문제 3, 4

이 문제를 해결할 때 마을들의 좌표 x_i를 정렬하여도 답에 영향을 끼치지 않으므로 마을들의 좌표를 모두 정렬하고 시작하였다고 가정하자.

부분문제 2와 마찬가지로 a_i와 $a_i x_i$에 대한 부분합 배열을 구축하되, 배열의 인덱스에는 좌표값 대신 순서가 들어가게 하자. 집합 S, T를 구분하는 마을의 번호를 이분 탐색 등의 알고리즘으로 $O(\log N)$ 시간에 구할 수 있고, 마찬가지 방법으로 $f(q_j)$를 계산할 수 있다. 총 시간복잡도는 $O((N + Q)\log N)$이다.

이 과정에서 $a_i = 1$인 경우만 고려하여 x_i에 대한 부분합 배열만 구축하고 이분 탐색 등을 이용하여 답을 계산할 경우 부분문제 3만 해결할 수 있으며, 모든 경우를 고려하여 풀이한 경우 부분문제 4까지 모두 해결할 수 있다.