"초등부 1번. 지우개" 문제 풀이

작성자: 윤교준

배열을 이용하여, 문제에서 요구하는 대로 구현하면 마지막에 남는 수가 무엇인지 알아낼 수 있다. 이 경우 시간복잡도는 $O\left(N^2\right)$이다.

답을 상수 시간에도 알아낼 수 있으며, 그 방법은 아래와 같다.

첫 (A) 작업에서 지워지는 수는, 이진법으로 적었을 때 $1 = 2^0$의 자리 숫자가 1이다.

두 번째 (A) 작업에서 지워지는 수는, 이진법으로 적었을 때 $2 = 2^1$의 자리 숫자가 1이다.

세 번째 (A) 작업에서 지워지는 수는, 이진법으로 적었을 때 $4 = 2^2$의 자리 숫자가 1이다.

따라서, 이러한 관찰을 확장하면, 1부터 N까지 자연수를 이진법으로 적었을 때, 숫자 '1'가 가장 상위의 자리에 등장하는 수가 마지막으로 남게 됨을 알 수 있다.

고로, 어떤 정수 $k \geq 0$에 대하여 $2^k \leq N < 2^{k+1}$라면, 답은 2^k이다.

"초등부 2번. 나누기" 문제 풀이

작성자: 이종영

부분문제 1

어떠한 부분을 골라도 합이 0이므로 $1 \le i < j < k < N$을 만족하는 모든 (i, j, k) 쌍이 가능한 분할이다. 1 이상 $N - 1$ 이하의 3개의 수를 골라야 하므로 $\binom{N-1}{3} = \frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{6}$개의 쌍이 가능하다. 시간복잡도는 $O(1)$이다.

부분문제 2

$1 \le i < j < k < N$을 만족하는 (i, j, k) 쌍으로 수열을 나누었다고 하자. 부분합 배열 $S_i = A_1 + \cdots + A_i$에 대해, 첫 번째 부분의 합은 $A_1 + \cdots + A_i = S_i$이다. 두 번째 부분의 합은 $A_{i+1} + \cdots + A_j = S_j - S_i$이며, 세 번째 부분의 합은 $A_{j+1} + \cdots + A_k = S_k - S_j$, 네 번째 부분의 합은 $A_{k+1} + \cdots + A_N = S_N - S_k$이다. 각 부분의 합이 같아야 하고 전체 수열의 합이 S_N이므로 각 부분의 합은 $\frac{1}{4}S_N$이어야 한다. 이를 만족하는 경우는 $S_i = \frac{1}{4}S_N$, $S_j = \frac{2}{4}S_N$, $S_k = \frac{3}{4}S_N$인 경우로 유일하다. 따라서, 문제를 $1 \le i < j < k < N$이며 $S_i = \frac{1}{4}S_N$, $S_j = \frac{2}{4}S_N$, $S_k = \frac{3}{4}S_N$을 만족하는 (i, j, k) 쌍의 개수를 세는 것으로 해결할 수 있다.

이 부분문제에서는 모든 i에 대해 $A_i > 0$이므로 S 배열은 증가하는 배열이며, S_N은 0보다 크다. 그러므로 $S_i = \frac{1}{4}S_N$, $S_j = \frac{2}{4}S_N$, $S_k = \frac{3}{4}S_N$를 만족하는 i, j, k 각각은 존재한다면 유일하며, 이 때 $1 \le i < j < k < N$을 만족한다. 따라서 $S_i = \frac{1}{4}S_N$, $S_j = \frac{2}{4}S_N$, $S_k = \frac{3}{4}S_N$를 만족하는 i, j, k가 모두 존재한다면 가능한 분할 방법의 수는 1이고, 그렇지 않은 경우 0이다. 시간복잡도는 $O(N)$이다.

부분문제 3

$S_N = 0$인 경우, $S_i = S_j = S_k = 0$을 만족해야 한다. $1 \le i < N$이며 $S_i = 0$을 만족하는 i의 개수를 M이라 할 때, 답은 $\binom{M}{3} = \frac{M(M-1)(M-2)}{6}$이다.

$S_N > 0$인 경우, 이 부분문제에서는 모든 i에 대해 $A_i \ge 0$이므로 S 배열은 단조증가하는 배열이다. 그러므로 $S_i = \frac{1}{4}S_N$, $S_j = \frac{2}{4}S_N$, $S_k = \frac{3}{4}S_N$를 만족하는 모든 (i, j, k) 에 대해 $1 \le i < j < k < N$을 만족한다. 따라서 $S_i = \frac{1}{4}S_N$, $S_j = \frac{2}{4}S_N$, $S_k = \frac{3}{4}S_N$를 만족하는 i, j, k의 개수를 각각 M_i, M_j, M_k로 정의한다면 답은 $M_iM_jM_k$이다. 시간복잡도는 $O(N)$이다.

부분문제 4

$1 \le i < j < k < N$을 만족하는 모든 (i, j, k) 쌍에 대해 분할 후 각 부분의 합을 구해 모두 같다면 답을 1 증가시키는 방법으로 해결할 수 있다. 시간복잡도는 $O(N^4)$이다.

부분문제 5

부분문제 4의 풀이에서, 부분합 배열을 이용하면 각 부분의 합을 $O(1)$에 구할 수 있다. 시간복잡도는 $O(N^3)$이다.

부분문제 6

D_i를 $1 \le j \le i$이며 $S_j = \frac{1}{4}S_N$을 만족하는 j의 개수라고 하자. $D_0 = 0$이며 1 이상의 i에 대해 $S_i = \frac{1}{4}S_N$인 경우 $D_i = D_{i-1} + 1$이고, 그렇지 않다면 $D_i = D_{i-1}$이다.

$2 \le j < k < N$이며 $S_j = \frac{2}{4}S_N$, $S_k = \frac{3}{4}S_N$을 만족하는 모든 (j,k) 쌍에 대해, $1 \le i < j$이며 $S_i = \frac{1}{4}S_N$을 만족하는 모든 i에 대해 (i,j,k) 쌍은 올바른 분할이다. 이러한 i는 D_{j-1}개가 있으므로, $O(1)$에 j와 k가 고정되었을 때 올바른 분할의 개수를 셀 수 있다. 따라서 $O(N^2)$에 문제를 해결할 수 있다.

부분문제 7

E_i를 $i \le j < N$이며 $S_j = \frac{3}{4}S_N$을 만족하는 j의 개수라고 하자. $E_N = 0$이며 $N-1$ 이하의 i에 대해 $S_i = \frac{3}{4}S_N$인 경우 $E_i = E_{i+1} + 1$이고, 그렇지 않다면 $E_i = E_{i+1}$이다.

$2 \le j < N-1$이며 $S_j = \frac{2}{4}S_N$을 만족하는 모든 j에 대해, $1 \le i < j$이며 $S_i = \frac{1}{4}S_N$을 만족하는 모든 i와 $j < k < N$이며 $S_k = \frac{3}{4}S_N$을 만족하는 모든 k에 대해 (i,j,k) 쌍은 올바른 분할이다. 이러한 i는 D_{j-1}개가 있고, 이러한 k는 E_{j+1}개가 있으므로, $O(1)$에 j가 고정되었을 때 올바른 분할의 개수를 셀 수 있다. 따라서 $O(N)$에 문제를 해결할 수 있다.