

1. 다른 모자 쓰기 (8점)

N 명의 사람이 있다.

이 사람들은 모두 서로 다른 모자를 쓰고 있는데, 이 모자를 벗어서 모아두었다가 다시 모자를 쓴다. 모자를 쓰는 방법의 수는 총 $N! = N \times (N - 1) \times \dots \times 1$ 가지이다.

이 중, 어떤 사람도 자신이 처음 썼던 모자를 다시 쓰지 않는 방법의 수는 $N = 2$ 이면 1가지, $N = 3$ 이면 2가지이다. $N = 4$ 이면 몇 가지가 있는가?

- 7
- 8
- 9
- 10
- 11

2. 상금 배분 (8점)

한국 시리즈 야구 결승은 7전 4선승제로 4번을 먼저 이기는 팀이 우승한다.

A팀과 B팀이 맞붙었는데, 처음 2경기를 A팀이 이긴 상태에서 사회적 거리두기로 더 이상 경기를 진행하지 않기로 했다.

A팀과 B팀의 실력은 동일하여 이길 확률은 같고, 승패를 결정하는 다른 요인이 없다고 하자.

한국 시리즈 우승 상금은 16억원이고, 이를 A팀이 2승으로 앞선 상태에서 A팀과 B팀의 우승확률을 가지고 배분하려고 한다.

A팀에게 얼마를 배정하는 것이 공정할까?

- 8억원
- 10억원
- 13억원
- 14억원
- 15억원

3. 함수 값 구하기 (8점)

양의 정수에 대해 정의되는 함수 $f(n)$ 은 다음과 같이 정의된다.

- $f(1) = 0$
- n 이 2 이상의 짝수라면, $f(n) = f(n/2) + 1$
- n 이 3 이상의 홀수라면, $f(n) = f(n + 1) + 1$

$f(2049)$ 의 값을 구하시오.

4. 동전과 확률 (8점)

10개의 동전이 있는데, 앞면은 모두 같은 모양이지만 뒷면은 x 개의 동전에는 A, $10 - x$ 개의 동전에는 B라고 표시가 되어 있다. 이 10개의 동전들이 앞면이 위가 되게 놓여 있다. 이 중 공평하게 두 개를 한번에 골라서 뒤집었을 때, 둘 모두 뒷면에 A가 나올 확률이 0.4 이하가 되는 가장 큰 x 의 값은?

- 8
- 7
- 6
- 5
- 4

5. 물통 (9점)

3L 들이 물통 하나, 7L 들이 물통 하나가 있다. 두 물통은 눈금이 없다.

물통을 가지고 할 수 있는 일은 다음과 같다. 물의 가격은 없다고 가정하자. 즉 물을 받고 비우는 것에 제약은 없다.

- 수도에서 물을 받아서 물통을 물로 가득 채운다.
- 물통에 든 물을 모두 비운다.
- 한 물통에 있는 물을 다른 물통으로 옮긴다. 이 때, 원래 물통이 텅 비거나 다른 물통이 가득 찰 때까지 물을 옮겨야 한다.

이 때 두 물통을 이용하여 만들 수 없는 물의 양은? 두 물통 중 하나에 해당하는 양이 남아 있으면 된다.

- 2L
- 4L
- 5L
- 6L
- 1L, 2L, 3L, 4L, 5L, 6L, 7L 모두 만들 수 있다.

6. 2의 100제곱 (9점)

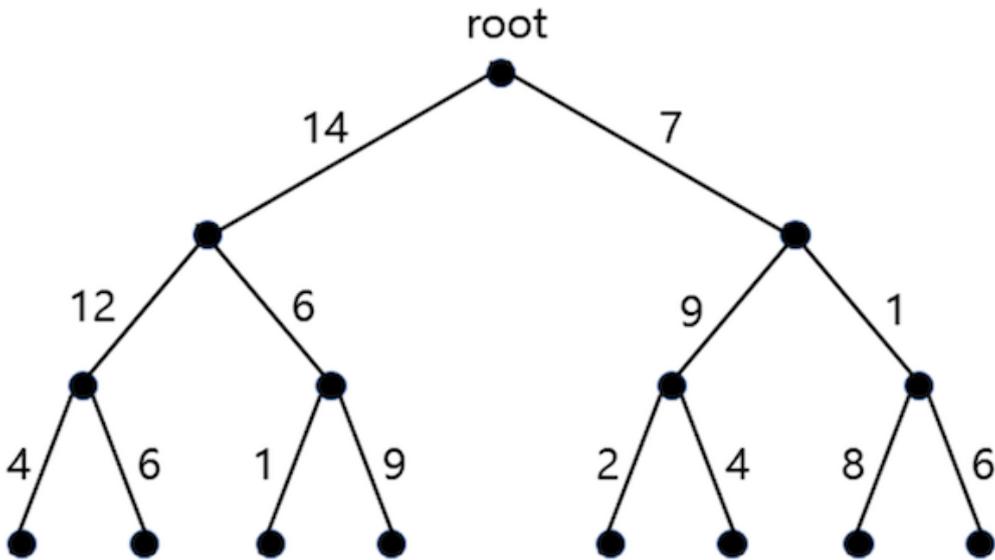
2^{100} (2의 100제곱, $2 \times 2 \times 2 \cdots \times 2$ 와 같이 2를 100번 곱한 수)을 10진법으로 표현했을 때, 이 수의 10의 자리 수는?

- 8
- 7
- 6
- 5
- 4

7. 경로 조정하기 (9점)

아래 보인 이진 트리에서 루트 노드로부터 각 잎 노드(최하위의, 자식이 없는 노드들)까지 경로의 길이는 다양하다. 경로의 길이는 경로 상에 있는 간선(들)의 가중치의 합으로 정의한다.

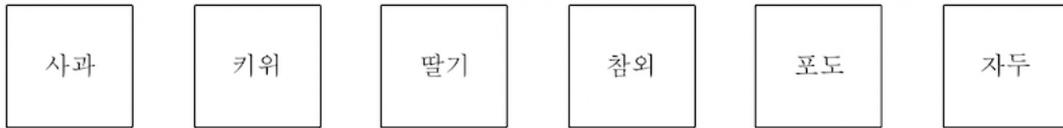
일부 간선의 가중치를 증가시켜 루트 노드로부터 모든 잎 노드까지의 경로 길이를 같게 만들려고 한다. 단, 증가시키는 가중치의 합이 최소가 되도록 하길 원할 때, 증가시키는 가중치(최종 가중치 - 원래 가중치)의 합은 얼마인가?



8. 과일 박스 찾기 (9점)

6개의 과일 박스가 있고, 각 박스에는 한 종류의 과일만 들어 있다.

박스에 들어 있는 6종류의 과일은 사과, 키위, 딸기, 참외, 포도, 자두이다. 각 박스엔 아래 그림에서 보인 것처럼 과일의 이름이 적혀 있다.



그런데 작업자의 실수로 박스에 적힌 과일 이름이 한 군데만 정확하고 나머진 실제로 들어 있는 과일과 다르다.

참고로, 박스만 보아서는 실제로 그 박스에 어떤 과일이 들어 있는지를 알 수 없다. 박스를 열면 박스 안에 어떤 과일이 들어 있는지 알 수 있다.

이름이 정확하게 적힌 박스를 알기 위해 최악의 경우 열어야 하는 박스의 최소 개수는 몇 개인가?

- 2
- 3
- 4
- 5
- 6

9. 돌 무더기 게임 (10점)

A, B 두 사람이 다음과 같은 게임을 한다. 두 사람은 테이블 하나에 서로 마주보고 앉아있다.

테이블 위에는 세 개의 돌 무더기가 있고, 각 무더기에는 각각 1개, 2개, 3개의 돌이 있다.

A부터 시작해서 돌아가면서 게임을 진행하는데, 세 돌 무더기 중 하나를 고르고, 가져가고 싶은 개수만큼의 돌을 가져간다. 단, 돌을 최소한 한 개는 가져가야 한다.

돌을 가져간 다음, 테이블에 돌이 남아있지 않다면, 이 사람이 이긴다.

A, B 모두 항상 자신이 이기기 위해서 최선을 다한다. 이 때 게임의 결과는 어떻게 될까?

- A가 항상 승리한다.
- B가 항상 승리한다.
- A가 승리할 수도, B가 승리할 수도 있다.

10. 숫자 추측 (10점)

정사면체의 각 면에는 숫자 1, 2, 3, 4가 한 면에 하나씩 적혀 있다.

가운이는 정사면체를 두 번 던진 후, 바닥에 닿은 면의 두 수 a 와 b ($a \leq b$)를 구한 다음, 나은에게는 두 수의 합 $a + b$ 를, 다래에게는 두 수의 곱 $a \times b$ 를 알려 주었다.

가운이가 알고 있는 두 수에 대해 나은이와 다래가 아래와 같이 대화를 나눈다. 두 사람은 모두 자신이 아는 한 진실만을 말하였다.

- 나은: 넌 두 수가 뭔지 알겠니?
- 다래: 모르겠어. 넌 두 수가 뭔지 알겠니?
- 나은: 처음엔 몰랐는데 이젠 알겠어.
- 다래: 난 여전히 모르겠는걸.
- 나은: 가운이가 말하길, 너가 들은 수와 내가 들은 수가 다르다고 했어.
- 다래: 오! 나도 이젠 알겠어.

$a^2 + b^2$ 의 값은?

- 2
- 5
- 8
- 10
- 17

11. 중심 노드 찾기 (10점)

1부터 n 까지 번호가 매겨진 n 개의 노드가 있는 유향 단순 그래프(simple directed graph)가 있다.

이 중 한 노드가 진입 차수(in-degree)가 0이고, 진출 차수(out-degree)가 $n - 1$ 임이 보장되어 있다. 이 노드를 "중심 노드"라고 하자.

$\text{query}(a, b)$ 는 두 노드 a 와 b 에 대해 a 에서 b 를 향하는 방향성 간선($a \rightarrow b$)가 존재하는지 질의를 하는 함수이며, 이 질의에 대한 답은 yes (존재함) 또는 no (존재하지 않음)이다.

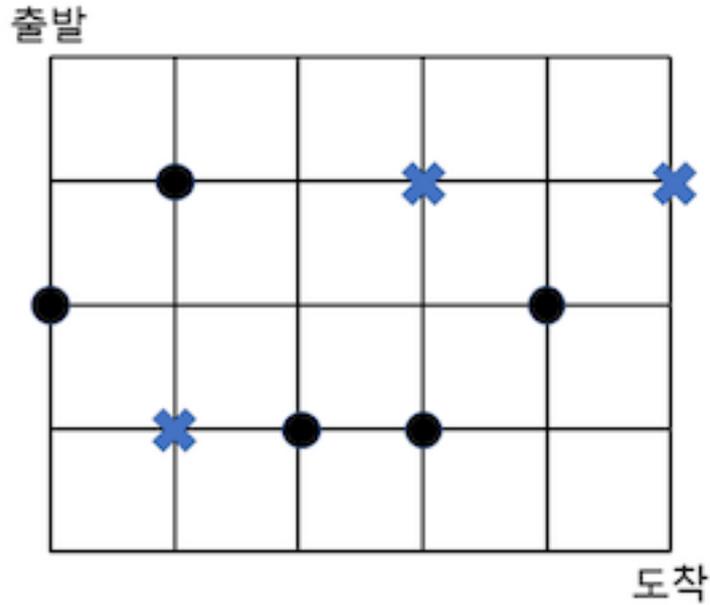
어떤 그래프에서도 중심 노드를 찾는 것을 보장하는 query 함수의 최소 호출 횟수는?

- $\lceil \log_2 n \rceil$
- $\lceil n/2 \rceil$
- $n - 1$
- n
- $n(n - 1)/2$

12. 두 번 이상 지나는 경로 세기 (10점)

아래 그림에서 보인 것 같은 격자의 출발점에서 도착점까지 가기 위해서는 오른쪽 또는 아래로 이동하는 것만 허용된다. 또한, X로 표시된 곳은 지나갈 수 없다.

●로 표시된 곳을 2군데 이상 지나가는 서로 다른 경로의 개수는 몇 개인가?



- 42
- 51
- 53
- 63
- 108

13. 첫 월급 (9점)

재석이 그 어렵다는 취직에 성공하고 첫 월급을 탔다. 그동안 자신에게 도움을 준 지인들에게 감사함을 표하기 위해, 선물을 사서 나누려 한다.

모두 10개의 선물 상자를 구매하려고 한다. 선물 상자는 다음과 같이 다양한 조건으로 판매해서, 가장 좋은 조건을 조합해 최소 가격으로 구입하려고 한다.

- 선물 상자 1개를 175원에 구매할 수 있다.
- 선물 상자 3개를 400원에 구매할 수 있다.
- 선물 상자 5개를 700원에 구매할 수 있다.

위 조건들을 조합해 10개의 선물 상자를 구매하려고 한다. 최소의 비용을 들여서 10개의 선물 상자를 구매해 보자!

아래에 있는 세 개의 버튼을 누르면 선물 상자를 구매할 수 있다. 10개의 선물 상자를 구매하고 나서 제출 버튼을 누를 수 있다. 제출 버튼을 누른 다음, 가능한 최소의 비용으로 10개의 선물 상자를 구매했다면 점수를 받을 수 있다. 제출한 비용이 최소 비용이 맞는지 바로 알려주지 않음에 유의하라.

지금까지 사용한 금액: 0원

다시 하기

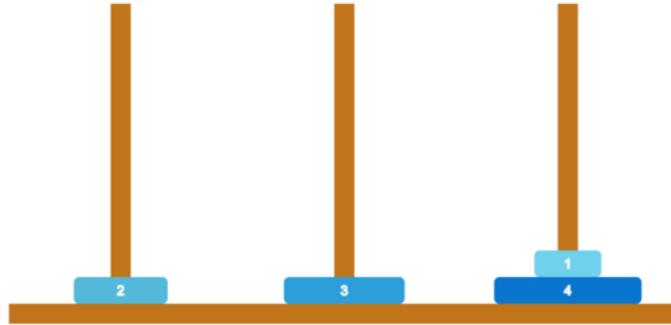
1개 구입 (175원)

3개 구입 (400원)

5개 구입 (700원)

14. 하노이의 탑 (9점)

세 개의 막대 위에 길이가 서로 다른 여섯 종류의 원판이 올라가 있다. 원판들은 반지름이 큰 원판이 아래에 오도록 아래와 같이 쌓여 있다.

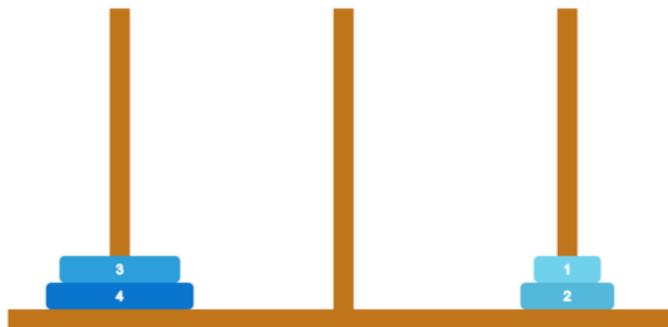


위 그림은 원판의 초기 배치를 나타낸다. 여기서 원판 하나를 들어 다른 막대 위로 올려다놓는 방법으로 원판을 옮길 수 있다. 이 과정에도 무조건 반지름이 큰 원판이 아래에 온다는 조건이 만족되어야 한다.

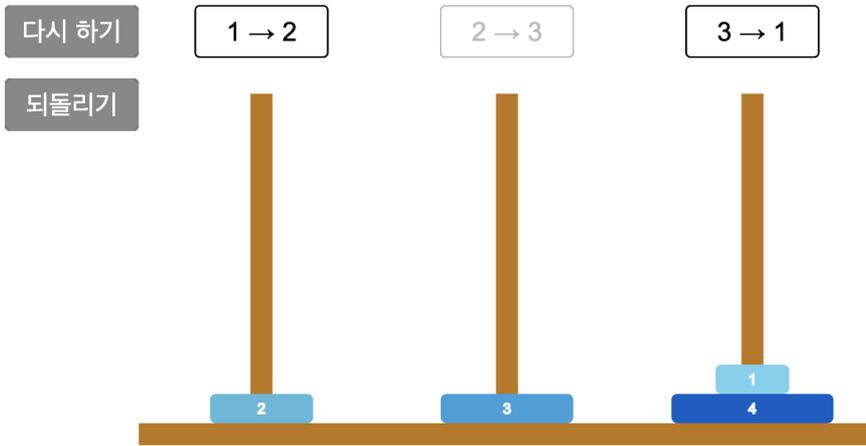
그리고, 이번에는 원판을 움직일 때 추가로 지켜야 하는 사항이 있다. 세 개의 막대가 차례로 1, 2, 3번 막대라고 하자. 이 때,

- 1번 막대에서 2번 막대로
- 2번 막대에서 3번 막대로
- 3번 막대에서 1번 막대로

원판을 움직이는 것만 허용된다. 이 사항을 지키면서 원판을 아래와 같은 상태로 만들어야 한다.



원판을 위 상태로 만들고 나서 제출 버튼을 눌러야만 점수를 받을 수 있다. 어떤 상태에서든 제출 버튼을 누르면 현재까지 옮긴 원판의 상태를 저장할 수 있다. 원판을 움직이는 횟수에 대한 제한은 없으므로, 움직임의 횟수를 최소화할 필요는 없다. 언제든지 '다시 하기' 버튼을 누르면 처음부터 다시 시작할 수 있으며, '되돌리기' 버튼을 누르면 방금 한 이동을 되돌릴 수 있다. 원판을 위와 같은 상태로 만들었다고 별도로 알려주지 않음에 유의하라.



15. 깃발 모으기 (9점)

다섯 종류(종류 A, B, C, D, E)의 깃발 30개가 아래와 같이 일렬로 서 있다. 각 깃발에는 해당 깃발의 종류를 나타내는 문자가 써있다.

여러분에게 총 5개의 부분 문제가 주어질 것이다. 각 부분 문제는 다음과 같다:

- 주어지는 지정된 깃발에 대해 그 깃발의 위치를 포함하고, 모든 종류의 깃발을 다 모을 수 있는 최소 개수의 연속된 깃발을 선택해야 한다.

깃발의 선택은 시작점과 끝점을 차례로 클릭하여 할 수 있다. 예를 들어, 3, 4, 5, 6, 7번째 깃발을 선택하기 위해서는 3번째 깃발과 7번째 깃발을 차례로 클릭하면 된다.

제출을 하지 않으면 무효화됨에 유의하라. "전체 다시 하기" 버튼을 누르면 어떤 순간이라도 모든 부분 문제들을 처음 부터 다시 해결할 수 있다.

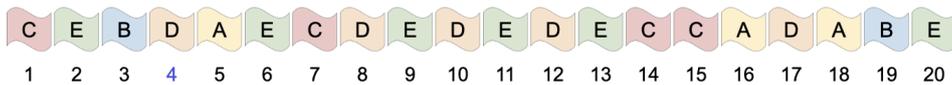
어떤 부분 문제에 대해 선택한 답안을 초기화 하고자 한다면, "이 문제 다시 하기" 버튼을 누르면 된다.

채점 방식

제출한 답안의 점수는 (최소 개수의 연속된 깃발을 선택하여 해결한 문제의 수)와 (전체 배점의 20%)의 곱으로 계산된다.

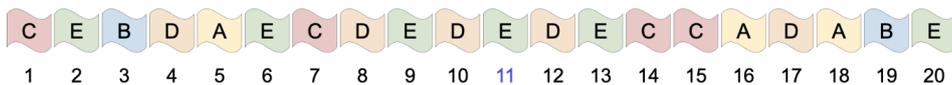
1번 문제 V 2번 문제 (!) 3번 문제 (!) 4번 문제 (!) 5번 문제 (!) 이 문제 다시 하기 전체 다시 하기

문제 1. 4번째 깃발을 포함하는 구간의 시작을 선택하십시오.
시작점과 끝점 모두 선택하지 않으셨습니다.



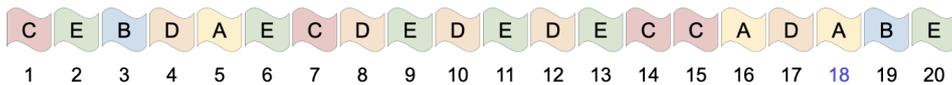
1번 문제 (!) 2번 문제 V 3번 문제 (!) 4번 문제 (!) 5번 문제 (!) 이 문제 다시 하기 전체 다시 하기

문제 2. 11번째 깃발을 포함하는 구간의 시작을 선택하십시오.
시작점과 끝점 모두 선택하지 않으셨습니다.



1번 문제 (!) 2번 문제 (!) 3번 문제 V 4번 문제 (!) 5번 문제 (!) 이 문제 다시 하기 전체 다시 하기

문제 3. 18번째 깃발을 포함하는 구간의 시작을 선택하십시오.
시작점과 끝점 모두 선택하지 않으셨습니다.



1번 문제 (!)

2번 문제 (!)

3번 문제 (!)

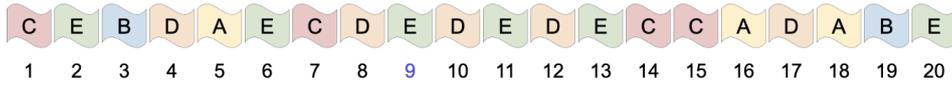
4번 문제 V

5번 문제 (!)

이 문제 다시 하기

전체 다시 하기

문제 4. 9번째 깃발을 포함하는 구간의 시작을 선택하십시오.
시작점과 끝점 모두 선택하지 않으셨습니다.



1번 문제 (!)

2번 문제 (!)

3번 문제 (!)

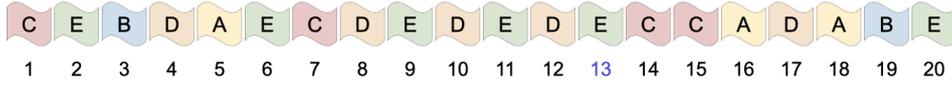
4번 문제 (!)

5번 문제 V

이 문제 다시 하기

전체 다시 하기

문제 5. 13번째 깃발을 포함하는 구간의 시작을 선택하십시오.
시작점과 끝점 모두 선택하지 않으셨습니다.



16. 2등을 찾아라! (12점)

KOI학교에 다니는 8명의 학생들은 4일 동안 팔씨름 경기를 치렀다. 각 학생들의 팔씨름 실력은 서로 다른 고정되어 있는 값이며, 두 학생간의 팔씨름 경기에서는 반드시 실력이 더 높은 학생이 승리했다. 유감스럽게도, 우리는 각 학생의 팔씨름 실력이 정확히 얼마인지는 모른다.

여러분에게는

- 1일차까지 있었던 경기들의 결과
- 2일차까지 있었던 경기들의 결과
- 3일차까지 있었던 경기들의 결과
- 4일차까지 있었던 경기들의 결과

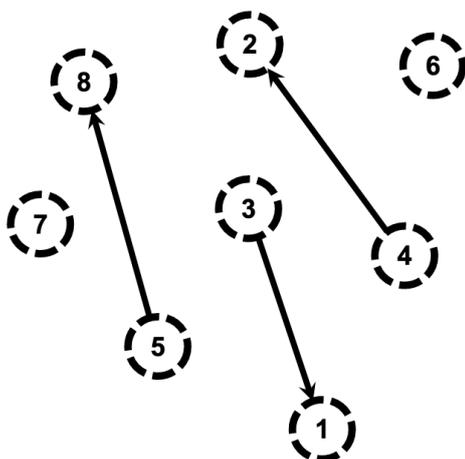
가 차례로 주어진다. 여러분은 4가지 시점(1, 2, 3, 4일차가 종료된 시점) 각각에 대해 해당 시점까지의 정보를 바탕으로 실력이 두 번째로 높은 학생이 될 수 있는 사람을 전부 구해야 한다. (즉, 여러분은 4개의 부분문제를 해결하는 것이라 볼 수 있다.)

입력은 방향 그래프의 형태로 주어지며, 실제로 발생 가능한 경우만 주어진다. (예를 들어, 1번 학생이 2번 학생을 이기고, 2번 학생이 1번 학생이 이긴 경우는 주어지지 않는다.) 정점에는 1부터 8까지의 번호가 붙어 있으며, 정점 x 에서 y 로의 간선이 있음은 학생 x 가 학생 y 를 이겼음을 의미한다.

어떤 학생을 선택하기 위해서는 해당되는 번호의 정점을 클릭하면 된다. 이미 선택된 학생과 대응되는 정점을 다시 클릭하면 선택이 해제된다. 선택이 되었으면 정점이 실선으로, 선택이 되지 않았으면 정점이 점선으로 표시됨을 참고하라. 제출을 하지 않으면 무효화됨에 유의하라. "다시 하기" 버튼을 누르면 어떤 순간이라도 문제들을 처음 부터 다시 해결할 수 있다.

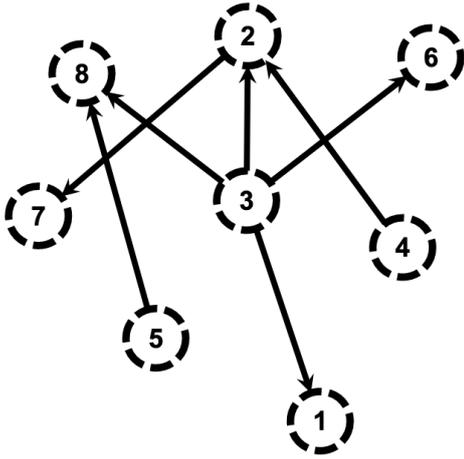
채점 방식

각 부분문제는 모두 (문제의 전체 배점의 25%)를 지낸다. 즉, 1, 2, 3, 4일차가 종료된 시점 각각에 대해 실력이 두 번째로 높은 학생이 될 수 있는 사람을 올바르게 전부 구할 때 마다 (문제 배점의 25%)를 획득하게 된다.



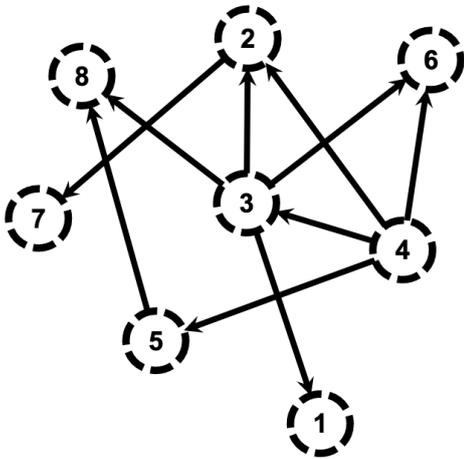
아직 답을 입력하지 않은 문제가 있습니다.

- 1일차 V
- 2일차 (!)
- 3일차 (!)
- 4일차 (!)
- 다시 하기



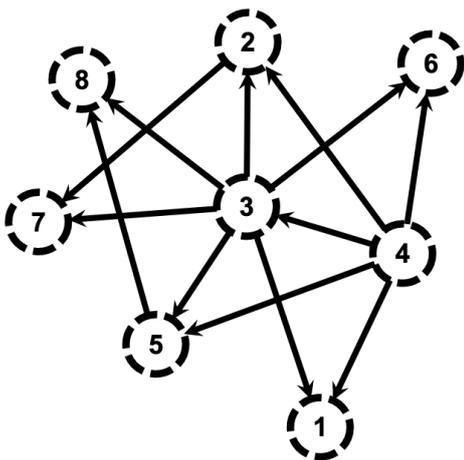
아직 답을 입력하지 않은 문제가 있습니다.

- 1일차 (!)
- 2일차 V
- 3일차 (!)
- 4일차 (!)
- 다시 하기



아직 답을 입력하지 않은 문제가 있습니다.

- 1일차 (!)
- 2일차 (!)
- 3일차 V
- 4일차 (!)
- 다시 하기



아직 답을 입력하지 않은 문제가 있습니다.

- 1일차 (!)
- 2일차 (!)
- 3일차 (!)
- 4일차 V
- 다시 하기

18. 바둑돌 게임 (13점)

아래와 같이 항아리 안에 바둑돌이 38개가 있다.

당신 (A)과 컴퓨터 플레이어 (B)는 다음과 같은 게임을 할 것이다.

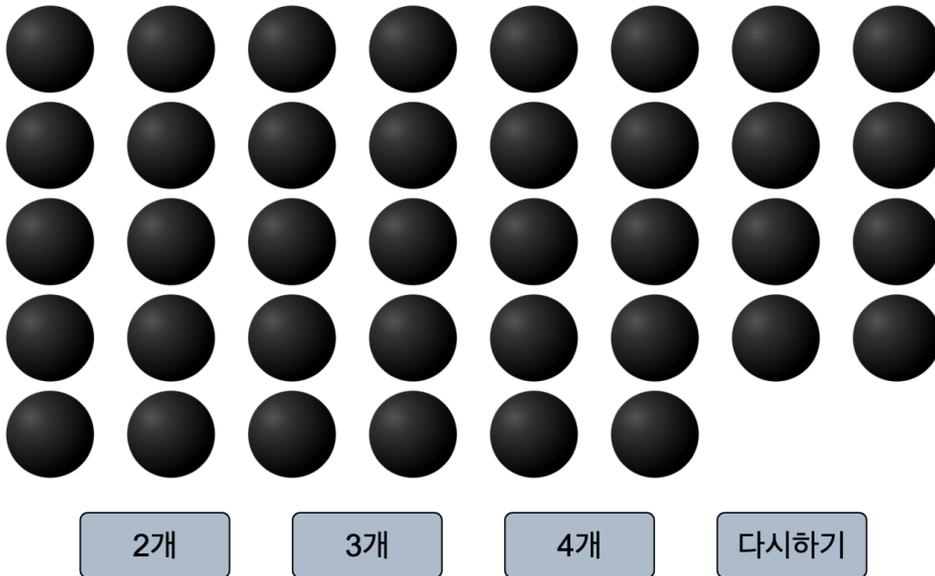
- A가 먼저 게임을 시작한다.
- A와 B는 번갈아서, 한 번에 2개, 3개, 또는 4개의 바둑돌을 가져간다.
- 단, 직전에 앞 사람이 가져간 만큼 다음 사람이 같은 수의 바둑돌을 가져가면 안된다. 예를 들어, 앞 사람이 3개를 가져가면, 직후에 그 다음 사람은 2개 혹은 4개만 가져갈 수 있다.
- 자신의 차례가 왔을 때 바둑돌을 가져갈 수 없는 사람이 지고 상대방이 이긴다.

컴퓨터를 이겨 보자!

아래에서 직접 게임을 진행할 수 있다. 당신이 몇 개의 바둑돌을 가져갈 지 하단의 버튼을 이용하여 선택하면, 잠시 후 컴퓨터가 바둑돌 몇 개를 가져간다. 당신은 컴퓨터와 턴을 번갈아서 진행하며, 컴퓨터를 이기는 것이 목표이다.

게임에서 이겼더라도, 그 상태로 제출 버튼을 누르지 않으면 무효화됨에 유의하라.

가져갈 돌 개수를 선택해주세요.



19. 단조증가 수열 (14점)

표에 몇 개의 정수가 쓰여져있다. 여러분은 다음의 두 연산을 원하는 만큼 많이 할 수 있다:

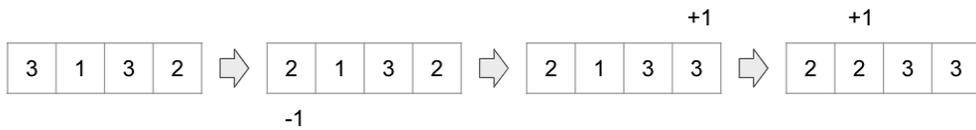
- 연산 1: 표에서 하나의 칸을 선택하고, 그 칸에 적힌 수를 1만큼 증가시킨다.
- 연산 2: 표에서 하나의 칸을 선택하고, 그 칸에 적힌 수를 1만큼 감소시킨다.

단, 연산을 적용한 후에 수들이 0 이상 99 이하의 범위에 있어야 한다. 즉, 99 이상의 수가 적힌 칸에는 첫 번째 연산을 적용할 수 없고, 0 이하의 수가 적힌 칸에는 두 번째 연산을 적용할 수 없다. (당연히, 초기에 주어지는 수들 또한 0 이상 99 이하이다.)

여러분의 목표는 위 연산들을 **최소 횟수**만 이용하여 표에 적힌 수들이 단조증가하도록 하는 것이다. 즉, i 번째 칸에 적힌 수를 A_i 라 했을 때, $A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_8$ 이 되도록 하는 것이다.

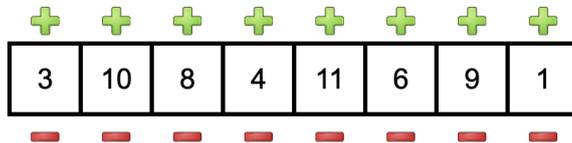
아래의 그림은 3, 1, 2, 4가 적힌 표를 주어진 연산을 3번 이용하여 단조증가하도록 만드는 하나의 예이다.

"다시 하기" 버튼을 클릭하면 언제든지 문제를 처음 부터 다시 해결할 수 있다. "제출" 버튼을 누르지 않으면 답안이 채점되지 않음에 유의하라.



총 연산 횟수: 0

다시 하기



20. 삼각형 게임 (14점)

아래와 같이 13개의 점들이 원형으로 나열되어 있다.

당신 (A)과 컴퓨터 플레이어 (B)는 다음과 같은 게임을 할 것이다.

- A가 먼저 게임을 시작한다.
- A와 B는 번갈아서, 서로 다른 두 점을 골라 두 점을 잇는 선분을 그린다.
- 선분을 그릴 때, 선분의 양 끝점을 제외한 곳에서 다른 선분과 교차하게 그릴 수 없다.
- 선분들을 이용해 가장 먼저 삼각형을 완성한 사람이 이긴다. 삼각형을 완성할 때 상대 플레이어가 그린 선분을 마음껏 이용해도 괜찮다.

컴퓨터를 이겨 보자!

아래에서 직접 게임을 진행할 수 있다. 원형으로 나열된 13개의 점들 중 두 개를 차례로 클릭하면 두 점을 잇는 선분을 그릴 수 있다. 클릭한 점을 다시 클릭하면 선택을 취소할 수 있다. 당신이 두 점을 잇는 선분을 그리고 나면, 잠시 후 컴퓨터가 두 점을 잇는 선분을 그린다. 당신은 컴퓨터와 턴을 번갈아서 진행하며, 컴퓨터를 이기는 것이 목표이다.

컴퓨터에게서 승리했더라도, 그 상태로 제출 버튼을 누르지 않으면 무효화됨에 유의하라.

선분으로 잇고 싶은 두 점을 차례로 클릭해 주세요.

