고등부 4. 경계 로봇

풀이 작성자: 윤교준

하나의 센서는 $2r$의 구간을 감시할 수 있으므로, $2rN < L$라면, 답은 -1이다. 또한, $2rN \geq L$라면, 항상 완벽한 경계가 가능하다. 이제, $2rN \geq L$가 성립한다고 가정하자.

부분문제 1 ($N \leq 10$, $L \leq 100$, $r \leq 10$)

다음 네 가지 관찰이 요구된다:

관찰 1-1 로봇이 내려놓은 센서은 다시 집어 옮기지 않아도 충분하다.

관찰 1-2 로봇이 아직 집지 않은 센서 위를 지나간다면, 그 센서를 무조건 가져가는 최적해가 존재한다.

관찰 1-3 센서의 위치는 정수만 고려해도 충분하다.

관찰 2-1 로봇이 K개의 센서를 옮겼다면, $r, 3r, 5r, \cdots, (2K-3)r, x$에 배치하는 것이 최적이다. 여기서, $(2K-3)r \leq x \leq (2K-1)r$이다.

모든 K에 대하여, 가능한 모든 센서 배치를 생각하자. 관찰 2-1에 의하여, 이러한 배치는 $O(rN)$이다. (엄밀하게는, $O(L)$이다.)
센서 배치가 주어졌을 때, 로봇이 움직여야 하는 거리는 BFS를 통하여 계산할 수 있다. '현재 로봇의 위치', '로봇이 집은 센서의 총 개수', '배치가 완료된 센서의 집합', 총 세 개의 정보로 현재 상태를 완벽하게 표현할 수 있다. 상태의 수가 총 $O(N2^NL)$이므로, $O(L \times N2^NL) = O(N2^NL^2)$의 시간복잡도로 부분문제를 해결할 수 있다.

부분문제 2 ($N \leq 30$, $L \leq 2000$, $r \leq 30$)

다음의 추가적인 관찰이 요구된다:

관찰 3 잉여의 센서를 가지고 있는 로봇은 무조건 전진하는 최적해가 존재한다.

센서의 최종 배치를 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_K$라 하자. 로봇의 최적 전략은 다음 DP를 이용하여 계산할 수 있다:

`DP[`n`]` := 현재, 로봇이 Y_n에 위치하고, 어떠한 센서도 가지고 있지 않으며, 옮긴 n개의 센서는 각각 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$에 위치시켰을 때, 이를 위하여 로봇이 움직여야 하는 최소 거리.

`DP[1]`, $\cdots$, `DP[`K`]`의 값을 모두 알고 있다면, 배치 Y_i를 달성하기 위하여 필요한 최소 이동 거리는 $O(K^2)$ 혹은 $O(K)$에 계산할 수 있다.
`DP` 배열 또한 $O(K^3)$에 모든 값을 계산할 수 있다.
따라서, $O(LN^3)$의 시간 복잡도로 본 부분문제를 해결할 수 있다.

부분문제 3 ($N \leq 500$)

다음 관찰이 요구된다:

관찰 4-1 센서 배치 Y_i가 주어졌을 때, 로봇이 x_l에서 왼쪽으로 방향을 바꾸었다면, $X_i \leq x_l$를 만족하는 i의 개수와 $Y_j \leq x_l$을 만족하는 j의 개수가 같다.

관찰 4-2 센서 배치 Y_i가 주어졌을 때, 로봇이 x_r에서 오른쪽으로 방향을 바꾸었다면,

- $X_i < x_r$을 만족하는 i의 개수와 $Y_j < x_r$을 만족하는 j의 개수가 같으며,
- $X_i \leq x_r$을 만족하는 i의 개수가 $Y_j \leq x_r$을 만족하는 j의 개수보다 작다.

$Y_K = (2K - 1)r$을 만족하는 모든 배치 Y_i에 대하여, 관찰 4에 의하여 로봇이 지그재그로 움직이는 과정을, 부분문제 2와 유사한 DP로 표현할 수 있다.
이 DP 배열은 $O(K^2)$에 계산할 수 있다. 답을 계산하는 과정은, 로봇이 마지막 센서를 처리하기 위하여 움직여야 하는 경로를 예외적으로 계산해준다면, $O(K)$ 혹은 $O(K^2)$에 할 수 있다.
따라서, $O(N \times N^2) = O(N^3)$의 시간 복잡도로 본 부분문제를 해결할 수 있다.

부분문제 4 ($N \leq 2500$)

부분문제 3의 DP를 구현하였다면, 누적 합 아이디어를 이용하여, DP 계산을 $O(K)$에 할 수 있다. 이 경우, 시간 복잡도는 $O(N^2)$이다.

부분문제 5

다음 관찰이 요구된다:

관찰 2-2 관찰 2-1에서 유의미한 x의 값은 오직 두 개이다.

관찰 2-3 관찰 2-1에서 유의미한 K는 오직 하나다.

따라서, 전체 시간 복잡도는 $O(N)$, 공간 복잡도는 $O(N)$ 혹은 $O(1)$이다.